ZBIÓR ZADAŃ Z LOGIKI NA XIII OGÓLNOPOLSKI KONKURS LOGICZNY

Zredagowali: Łukasz Nowakowski i Jan Zdyb

Spis treści

1. Wstęp

Logika jest sztuką precyzyjnego myślenia i wyciągania poprawnych wniosków. Choć na pierwszy rzut oka może wydawać się abstrakcyjna i oderwana od codziennego życia, w rzeczywistości otacza nas na każdym kroku – w argumentacji, analizie informacji czy podejmowaniu decyzji. Znajomość zasad logiki pozwala nie tylko unikać błędów w rozumowaniu, ale także skutecznie przekonywać innych i dostrzegać manipulacje w debatach publicznych.

Niniejszy zbiór zadań został przygotowany z myślą o uczniach szkół średnich, którzy pragną doskonalić swoje umiejętności logiczne w ramach przygotowań do konkursu logicznego. Obejmuje on szeroki zakres tematyczny, kluczowy dla rozwoju sprawności wnioskowania i analizy logicznej:

- **Klasyczny rachunek zdań** – operowanie na zdaniach logicznych i stosowanie spójników logicznych.
- **Teoria zdań kategorycznych** – podstawy klasycznego wnioskowania dedukcyjnego.
- **Rachunek zbiorów i relacji** – analiza struktur zbiorowych i relacyjnych.
- **Węższy rachunek predykatów** – precyzyjne modelowanie zjawisk rzeczywistości.
- **Zagadki logiczne** – niestandardowe problemy wymagające kreatywnego myślenia.
- **Teoria dyskusji, błędy logiczne i semiotyczne** – nauka argumentowania i prowadzenia racjonalnej debaty. Rozpoznawanie fałszywych argumentów i nieprecyzyjnych definicji.
- **Definicje w logice** – sposoby formułowania precyzyjnych i poprawnych definicji.

Zbiór ten ma na celu nie tylko rozwój umiejętności logicznych, ale także dostarczenie wyzwań intelektualnych. Na końcu książki zamieszczono odpowiedzi do zadań w taki sposób, aby umożliwić samodzielną weryfikację rozwiązań.

Mamy nadzieję, że niniejsza publikacja będzie nie tylko pomocna w przygotowaniach do konkursu, ale także rozbudzi pasję do logicznego myślenia i analizowania rzeczywistości w sposób precyzyjny i wnikliwy. Powodzenia!

2. Klasyczny rachunek zdań (KRZ)

2.1 Wprowadzenie

Klasyczny Rachunek Zdań (ang. *Classical Propositional Logic*), znany także jako rachunek zdań Boole'a, jest jednym z najstarszych i najbardziej fundamentalnych obszarów logiki matematycznej. Jego początek sięga XIX wieku, kiedy to George Boole, angielski matematyk i logik, wprowadził formalizm algebraiczny do analizy logicznych wyrażeń. Jego praca, *The Laws of Thought* (1854), położyła podwaliny pod nowoczesną teorię logiki matematycznej, której częścią jest klasyczny rachunek zdań.

Początkowo logika była rozważana w kontekście filozoficznym, ale rozwój matematyki w XIX wieku, w tym prace Boole'a, przeniósł ją na grunt formalny. Boole zaproponował sposób traktowania zdań jako zmiennych logicznych, które mogą przyjmować tylko dwie wartości: *prawda* (True) lub *fałsz* (False). To podejście zostało później rozwinięte przez innych matematyków, takich jak Augustus De Morgan i Gottlob Frege, którzy przyczynili się do dalszego rozwoju logiki formalnej i jej zastosowań w matematyce i informatyce.

Klasyczny rachunek zdań stanowi fundament wielu dziedzin matematyki i informatyki, szczególnie w obszarze logiki komputerowej i teorii obwodów cyfrowych. Jego zastosowania obejmują m.in.:

- **Analizę logiczną**: Rachunek zdań jest narzędziem służącym do badania poprawności argumentów logicznych i dowodów matematycznych.
- **Projektowanie układów cyfrowych**: Klasyczny rachunek zdań jest podstawą dla tworzenia układów logicznych w informatyce, takich jak bramki logiczne w układach cyfrowych.
- **Rozwiązywanie problemów decyzyjnych**: Używany do formułowania i rozwiązywania problemów decyzyjnych, które można sprowadzić do postaci logicznej (np. w sztucznej inteligencji).
- **Teoria baz danych**: Wykorzystywany w zapytaniach logicznych i w modelowaniu baz danych, gdzie decyzje o połączeniach danych oparte są na logice zdań.

Rachunek zdań jest również podstawą bardziej zaawansowanych systemów logicznych, takich jak rachunek predykatów i logika modalna, które rozszerzają klasyczny rachunek zdań o dodatkowe struktury i reguły.

2.2 Funktory logiczne

1. Negacja ($\neg$)

Negacja to operacja logiczna, która zmienia wartość logiczną wyrażenia. Jeśli wyrażenie jest prawdziwe, jego negacja będzie fałszywa, i odwrotnie.

$$\neg p$$

gdzie p jest zdaniem. Na przykład, jeśli zmienna p reprezentuje zdanie „Dziś pada deszcz", to $\neg p$ oznacza „Nie jest tak, że dziś pada deszcz".

p	$\neg p$
P	F
F	P

2. Alternatywa ($\vee$)

Alternatywa (lub) to operacja logiczna, która jest prawdziwa, gdy przynajmniej jedno z wyrażeń jest prawdziwe. Jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba wyrażenia są fałszywe.

$$p \vee q$$

gdzie p i q to zdania. Na przykład, jeśli p oznacza „Pada deszcz”, a q oznacza „Jest słonecznie”, to $p \vee q$ oznacza „Pada deszcz lub jest słonecznie”.

p	q	p $\vee q$
P	P	P
P	F	P
F	P	P
F	F	F

3. Koniunkcja ($\wedge$)

Koniunkcja (i) to operacja logiczna, która jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba wyrażenia są prawdziwe. W przeciwnym razie jest fałszywa.

$$p \wedge q$$

gdzie p i q to zdania. Na przykład, jeśli p oznacza „Pada deszcz”, a q oznacza „Jest zimno”, to $p \wedge q$ oznacza „Pada deszcz i jest zimno” (będzie prawdziwe tylko wtedy, gdy oba te zdania będą prawdziwe).

p	q	p $\wedge q$
P	P	P
P	F	F
F	P	F
F	F	F

4. Implikacja ($\rightarrow$)

Implikacja (jeśli... to...) to operacja logiczna, która mówi, że jeśli pierwsze wyrażenie jest prawdziwe, to drugie również musi być prawdziwe, aby całość była prawdziwa. Jeżeli pierwsze wyrażenie jest fałszywe lub drugie jest prawdziwe, implikacja jest zawsze prawdziwa, bez względu na wartość pozostałego wyrażenia.

$$p \rightarrow q$$

gdzie p oznacza „Pada deszcz”, a q oznacza „Będzie mokro”. Implikacja $p \rightarrow q$ oznacza „Jeśli pada deszcz, to będzie mokro”.

p	q	p $\rightarrow q$
P	P	P
P	F	F
F	P	P
F	F	P

5. Równoważność ($\equiv$)

Równoważność (wtedy i tylko wtedy gdy) to operacja logiczna, która mówi, że dwa wyrażenia są równoważne, gdy mają tę samą wartość logiczną. Inaczej mówiąc, obie strony muszą być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe w tym samym przypadku.

$$p \equiv q$$

gdzie p oznacza „Pada deszcz”, a q oznacza „Jest wilgotno”. Równoważność $p \equiv q$ oznacza „Pada deszcz, wtedy i tylko wtedy gdy jest wilgotno”.

p	q	$p \equiv q$
P	P	P
P	F	F
F	P	F
F	F	P

Warto zwrócić uwagę, że jeśli obok zdania p znajduje się np. znak koniunkcji po prawej stronie i znak implikacji po lewej, to najpierw wykonuje się działanie koniunkcji. Wynika to z ustalonej kolejności wykonywania operacji w logice, gdzie najpierw rozpatrywana jest negacja, potem koniunkcja, alternatywa, implikacja, a na końcu równoważność.

Zadanie 1

Zapisz schematycznie, przy pomocy liter: p, q, r, s następujące zdania:

a) Jeśli Jan nie wychodzi na zajęcia, to odpoczywa.

$$\neg p \to q$$

Objaśnienie:
p: Jan wychodzi na zajęcia.
q: Jan odpoczywa.
$\neg p$: Jan nie wychodzi na zajęcia.

b) Mateusz grywa w karty, tylko jeśli Jan śpi.

$$p \to q$$

Objaśnienie:
p: Jan śpi.
q: Mateusz grywa w karty.

c) Jeśli ulica nie jest mokra, to nie pada deszcz.

$$\neg p \to \neg q$$

Objaśnienie:
$\neg p$: Ulica nie jest mokra.
$\neg q$: Deszcz nie pada.

d) Jeżeli jest zimno i pada deszcz, to trzeba ubrać płaszcz i trzeba wziąć parasol.

$$(p \wedge q) \to (r \wedge s)$$

Objaśnienie:
p: Jest zimno.
q: Pada deszcz.
r: Trzeba ubrać płaszcz.
s: Trzeba wziąć parasol.

e) Pojedziemy do Warszawy samochodem lub polecimy do Tokio samolotem wtedy i tylko wtedy, gdy nie będzie zasp śnieżnych i nie będzie burzy.

$$(p \vee q) \equiv (\neg r \wedge \neg s)$$

Objaśnienie:
p: Pojedziemy do Warszawy samochodem.
q: polecimy do Tokio samolotem.
$\neg r$: Nie będzie zasp śnieżnych.

$\neg s$: Nie będzie burzy.

f) Jeżeli Monika jest Polką i Kuba jest Polakiem, to ich syn jest Polakiem.

g) Jeżeli Jan pracuje na KUL-u i dużo zarabia, to będzie go stać na samochód.

h) Na KUL-u jest konkurs logiczny, więc się na niego szykuję.

i) Dziś będzie ślisko wtedy i tylko wtedy, gdy padał wczoraj deszcz i nie było ciepło.

j) Jeśli Bolesław Prus jest tą samą osobą co Aleksander Głowacki, to książkę 'Emancypantki' napisał Bolesław Prus lub Aleksander Głowacki.

k) Jeśli jest piękny dzień, to uczę się logiki i myślę o kotach.

l) Jeśli dziś jest piątek, to juto jest sobota wtedy i tylko wtedy, gdy wczoraj był czwartek i przedwczoraj była środa.

Metoda zero-jedynkowa (0-1) w rachunku zdań

Metoda zero-jedynkowa (0-1) w rachunku zdań to technika używana do oceny prawdziwości zdań logicznych w logice klasycznej. Jest to sposób reprezentowania wartości logicznych, gdzie:

- 0 oznacza, że dane wyrażenie jest fałszywe,
- 1 oznacza, że dane wyrażenie jest prawdziwe.

W tej metodzie zdania logiczne są traktowane jako kombinacje zmiennych, które mogą przyjmować tylko jedną z dwóch wartości: 0 (fałsz) lub 1 (prawda). Na tej podstawie ocenia się, czy dane wyrażenie jest prawdziwe, czy fałszywe w zależności od wartości przypisanych poszczególnym zmiennym. Podczas tworzenia tabelek ważne jest, aby każdy możliwy zestaw wartościowań wyrażenia był rozpatrywany.

1. Negacja ($\neg$)

$$\neg p$$

Tabela prawdy dla negacji:

p	$\neg p$
1	0
0	1

2. Koniunkcja ($\wedge$)

$$p \wedge q$$

Tabela prawdy dla koniunkcji:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. Alternatywa ($\vee$)

$$p \vee q$$

Tabela prawdy dla alternatywy:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4. Implikacja ($\rightarrow$)

$$p \rightarrow q$$

Tabela prawdy dla implikacji:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	1

5. Równoważność ($\equiv$)

$$p \equiv q$$

Tabela prawdy dla równoważności:

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2.3 Metoda skróconego sprawdzania 0-1

Metoda skróconego sprawdzania 0-1 to technika stosowana w rachunku zdań, która polega na szybkim określaniu prawdziwości wyrażeń logicznych przez przypisanie wartości 0 (fałsz) lub 1 (prawda) zmiennym w wyrażeniu, a następnie zastosowanie odpowiednich operacji logicznych. Zamiast analizować wszystkie możliwe przypadki, metoda ta pozwala na uproszczenie procesu przez skupienie się na kluczowych zmiennych i operacjach, które decydują o wartości całego wyrażenia.

Analizując tabelę dla implikacji, można zauważyć, że implikacja z prawdziwym następnikiem lub z fałszywym poprzednikiem jest zawsze prawdziwa. Innymi słowy, implikacja może być fałszywa jedynie wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Ten fakt jest wykorzystywany w tzw. metodzie skróconego sprawdzania zero-jedynkowego. Polega ona na tym, że w sprawdzaniu, czy dane wyrażenie implikacyjne jest prawem logiki, zakłada się, iż poprzednik implikacji głównej jest prawdziwy, a następnie oblicza się wartość jej następnika, lub na odwrót – zakłada się fałszywość następnika implikacji głównej i oblicza się przy tym założeniu wartość jej poprzednika.

Można również poczynić oba założenia jednocześnie, co oznacza założenie fałszywości całej implikacji. Jeśli badana implikacja jest prawem logiki, takie założenie doprowadzi do sprzeczności w miejscu wstawienia wartości logicznej w ostatnim wolnym miejscu (tzn. że to 'ostatnie wyrażenie' będzie miało przyporządkowaną zarówno prawdziwość, jak i fałszywość). Jeśli natomiast badane wyrażenie nie jest prawem logiki, w miejscu ostatniego wstawienia wartości logicznej nie otrzymamy sprzeczności (przypisania '0' i '1'), co oznacza, że faktycznie badane wyrażenie przy otrzymanym wartościowaniu jest fałszywe.

Krok 1
Znajdź główny funktor logiczny, czyli ten który 'łączy' obie części i podpisz pod nim 0 (załóż fałszywość całego wyrażenia implikacyjnego).

$\neg q$	$\to$	$(\neg q$	$\wedge$	$r)$
	0			

Krok 2
Teraz korzystając z tabel 0-1 podpisz pod funktorem głównym poprzednika implikacji 1, a pod następnikiem implikacji (jego funktorem głównym) 0.

$\neg q$	$\to$	$(\neg q$	$\wedge$	$r)$
1	0		0	

Krok 3
Teraz powtarzamy krok 2 korzystając z tabel 0-1 kolejnych funktorów tak długo, aż wypełnimy wszystkie wolne miejsca pod zmiennymi lub funktorami.

$\neg q$	$\to$	$(\neg q$	$\wedge$	$r)$
1	0	1	0	0

Jeśli przeliczając wartość wyrażenia, którego argumentem jest 'ostatnie wolne miejsce' otrzymamy zarazem 0, jak i 1, oznacza to, że twierdzenie jest prawem logiki. Natomiast jeśli nie znajdziemy żadnej sprzeczności, wyrażenie nie jest prawem logiki. Pamiętajmy, że na samym początku założyliśmy, że twierdzenie będzie fałszywe, więc jeśli dojdziemy do sprzeczności będzie to oznaczało prawdziwość implikacji.

Jeśli nie będziesz czuł się pewny w skróconej metodzie, to nic nie szkodzi, korzystaj z podstawowej metody zero-jedynkowej. Jednak zalecane jest jej opanowanie, gdyż przy dłuższych i bardziej skomplikowanych wyrażeniach znacząco skraca czas ich badania.

Zadanie 2

Sprawdź przy użyciu metody 0-1 kiedy zdania z Zadania 1 są prawdziwe lub (jeśli czujesz się pewnie) metody skróconej 0-1:

a) Tabelka 0-1 dla zdania "Jeśli Jan nie wychodzi na zajęcia, to odpoczywa", które zapiszemy jako $\neg p \to q$:

p	$\neg p$	q	$\neg p \to q$
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0

d) Tabelka 0-1 zdania "Jeżeli jest zimno i pada deszcz, to trzeba ubrać płaszcz i trzeba wziąć parasol", które zapiszemy jako $(p \wedge q) \to (r \wedge s)$:

p	q	$p \wedge q$	r	s	$r \wedge s$	$(p \wedge q) \to (r \wedge s)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1

Wyjaśnijmy skąd te odpowiedzi. Po pierwsze, tym co sprawdzamy powyżej, jest odpowiedź na pytanie, kiedy implikacja jest prawdziwa, a kiedy fałszywa. Aby to zrobić, musimy znać wartości logiczne jej członów (to co jest bezpośrednio przed i po implikacji). Przed implikacją mamy $(p \wedge q)$ i sprawdzamy wartość logiczną tej koniunkcji, po czym sprawdzamy wartość logiczną tego, co mamy po funktorze implikacji, czyli $(r \wedge s)$. Gdy znamy już wartości logiczne tego, co jest przed i po funktorze implikacji, możemy sprawdzić samą implikację zgodnie z tabelkami powyżej.

k) Tabelka 0-1 dla zdania "Jeśli dziś jest piękny dzień, to uczę się logiki i myślę o kotach", które zapiszemy jako p $\to (q \wedge r)$.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	0	1	0	1
1	1	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1

Podstawowe Reguły Wnioskowania

1. Opuszczanie Koniunkcji (OK)

Jeśli mamy koniunkcję $p \wedge q$, to możemy wyprowadzić z niej p lub q.

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \text{(OK)}$$

$$\frac{p \wedge q}{q} \quad \text{(OK)}$$

2. Dołączanie Koniunkcji (DK)

Jeśli mamy p oraz q, to możemy wprowadzić koniunkcję $p \wedge q$.

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q} \quad \text{(DK)}$$

3. Opuszczanie Alternatywy (OA)

Jeśli mamy alternatywę $p \vee q$ oraz zaprzeczenie jednego członu np. $\neg p$, to możemy z tego wyprowadzić zdanie drugie np. q.

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p} \quad \text{(OA)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q} \quad \text{(OA)}$$

4. Dołączanie Alternatywy (DA)

Jeśli mamy p, to możemy dołączyć alternatywę z dowolnym zdaniem q, tworząc $p \vee q$.

$$\frac{p}{p \vee q} \quad \text{(DA)}$$

$$\frac{p}{q \vee p} \quad \text{(DA)}$$

5. Opuszczanie Równoważności (OE)

Z równoważności $p \equiv q$, możemy wyprowadzić $p \to q$ i $q \to p$:

$$\frac{p \equiv q}{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to p \end{array}} \quad \text{(OE)}$$

6. Dołączanie Równoważności (DE)

Jeśli mamy $p \to q$ i $q \to p$, to możemy wyprowadzić wniosek $p \equiv q$:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to p \end{array}}{p \equiv q} \quad \text{(DE)}$$

7. Reguła Odrywania (RO)

Jeśli mamy p oraz $p \to q$, to możemy wyprowadzić wniosek, że q.

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q} \quad \text{(RO)}$$

8. Twierdzenie De Morgana (DeMor)

Jeśli mamy $\neg(p \wedge q)$, to możemy z tego wyprowadzić $\neg q \vee \neg p$, jak i gdy mamy $\neg q \vee \neg p$ to wyprowadzimy $\neg(p \wedge q)$. Ta sama zależność zachodzi między $\neg p \wedge \neg q$, a $\neg(q \vee p)$.

$$\frac{\neg(p \wedge q)}{\neg q \vee \neg p} \quad \text{(DeMor)}$$

$$\frac{\neg q \vee \neg p}{\neg(p \wedge q)} \quad \text{(DeMor)}$$

$$\frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg(q \vee p)} \quad \text{(DeMor)}$$

$$\frac{\neg(q \vee p)}{\neg p \wedge \neg q} \quad \text{(DeMor)}$$

9. Modus Tollens (MT)

Jeśli mamy $p \rightarrow q$ oraz $\neg q$, to możemy wyprowadzić wniosek, że $\neg p$.

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p} \quad \text{(MT)}$$

10. Sylogizm Hipotetyczny (SH)

Jeśli mamy $p \rightarrow q$ oraz $q \rightarrow r$, to możemy wyciągnąć wniosek, że $p \rightarrow r$.

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r} \quad \text{(SH)}$$

11. Transpozycja Prosta (Trans)

Jeśli mamy implikację $p \rightarrow q$, to możemy wyprowadzić jej transpozycję $\neg q \rightarrow \neg p$.

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p} \quad \text{(Trans)}$$

12. Podwójna Negacja (NN)

Jeśli mamy $\neg\neg p$, to możemy wyprowadzić wniosek, że p. Analogicznie, jeśli mamy p, to możemy wyprowadzić wniosek, że $\neg\neg p$.

2.4 Przeprowadzenie dowodu

Dowód rozpoczynamy od wypisania założeń oraz zobaczenia, jaka jest teza dowodzonego twierdzenia. Gdy mamy twierdzenie $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow (p \vee \neg s)$, musimy znaleźć główny funktor (najczęściej implikacja), to on oddziela założenia od tego, co mamy udowodnić. Więc w powyższym przypadku założeniem będzie $(p \vee q) \wedge \neg q$, ale skoro wiemy, że opuszczanie koniunkcji daje nam jej elementy, to możemy zapisać, że mamy dwa założenia $(p \vee q)$ i $\neg q$, i z ich wykorzystaniem teraz musimy dojść do $(p \vee \neg s)$, aby powiedzieć, że dowód jest poprawny.

Oprócz twierdzeń jak powyżej możemy się natknąć na takie, z wieloma implikacjami np. $(q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow r)$. W takiej sytuacji głównym funktorem będzie implikacja między $(q \vee p)$ i $(q \rightarrow r)$, w tej sytuacji naszym jedynym założeniem byłoby $(q \vee p)$ gdybyśmy robili to tak samo jak w poprzednim przykładzie, ale tu mamy jeszcze jedno założenie wynikające z $(q \rightarrow r)$, jest nim q, wynika to z tego, że twierdzenie $(q \rightarrow r)$ jest implikacją, której warunkiem wystarczającym jest q, aby mogło zachodzić r. Zatem w tym przypadku mamy dwa założenia: $(q \vee p)$ oraz q. Teraz musimy wykazać, że z tych założeń wynika r, aby zakończyć dowód.

Zadanie 3

Za pomocą podanych wyżej podstawowych reguł wnioskowania przeprowadź dowody (o ile się da) dla:

a)

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

Dowód:

(1)	$p \rightarrow q$	założenia
(2)	$q \rightarrow r$	założenia
(3)	p	założenia
(4)	q	RO: 1, 3
	r	RO: 2, 4

b)

$$\frac{p \equiv q}{q \equiv p}$$

Dowód:

(1)	$p \equiv q$	zał.
(2)	$p \rightarrow q$	OE: 1
(3)	$q \rightarrow p$	OE: 2
	$q \equiv p$	DE: 2, 3

c)

$$\begin{array}{c} p \equiv q \\ q \equiv r \\ \hline p \equiv r \end{array}$$

Dowód:

(1)	$p \equiv q$	zał.
(2)	$q \equiv r$	zał.
(3)	$p \rightarrow q$	OE: 1
(4)	$q \rightarrow r$	OE: 2
(5)	$q \rightarrow p$	OE: 1
(6)	$r \rightarrow q$	OE: 2
(7)	$p \rightarrow r$	SH: 3, 4
(8)	$r \rightarrow p$	SH: 5, 6
	$p \equiv r$	DE: 7, 8

d)

$$\frac{p \equiv q}{\neg p \equiv \neg q}$$

e)

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

f)

$$((p \to q) \land p) \to q$$

zamiast wyrażenia można udowodnić schemat wnioskowania: $\dfrac{(p \to q) \land p}{q}$

g)

$$((p \to q) \land q) \to p$$

h)

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

Sprzeczności

W kontekście KRZ, sprzeczność oznacza sytuację, w której założenia prowadzą do wniosku, który jest logicznie niemożliwy lub niezgodny z innymi założeniami. Może to oznaczać, że przyjęte założenia nie mogą być prawdziwe jednocześnie, a zatem jeden z nich musi być fałszywy.

W bardziej formalnym sensie, sprzeczność w KRZ oznacza, że w toku dowodzenia dochodzimy do wniosku, który jest jednocześnie prawdziwy i fałszywy. W logice klasycznej, jeśli uda nam się wyprowadzić sprzeczność, oznacza to, że nasze założenia (lub wnioski) są błędne i muszą zostać odrzucone.

Przykład: Czy wyrażenia $(p \to q) \land (q \to \neg p) \land (s \to r) \land (p \land s)$ są sprzeczne?

(1)	$p \to q$	zał.
(2)	$q \to \neg p$	zał.
(3)	$s \to r$	zał.
(4)	$p \land s$	zał.
(5)	p	OK: 4
(6)	q	RO: 1, 5
(7)	s	OK: 4
(8)	$\neg p$	RO: 2, 6
		sprzeczność: 5, 8

Zadanie 4

Korzystając ze znanych ci podstawowych reguł wnioskowania sprawdź, które wyrażenia są z sobą sprzeczne:

a)

$$(\neg q \to \neg p) \land p \land (p \to r) \land (r \to \neg s) \land (q \to s)$$

b)

$$(p \land ((p \lor q) \lor \neg p) \equiv r \land \neg(p \lor q)$$

Dowód nie wprost

Dowód nie wprost opiera się na schemacie wnioskowania zwanym reductio ad absurdum, według którego jeśli z założenia wynikają dwa zdania sprzeczne, to założenie to nie jest prawdziwe. Na tej podstawie możemy opisać dowód nie wprost w sposób następujący: jako założenia wypisujemy poprzednik implikacji głównej oraz, jeśli w następniku implikacji głównej występuje implikacja - jej poprzednik i tak kolejno, aż w następniku implikacji, której poprzednik wypisaliśmy, nie występuje już implikacja. Wówczas, jako założenie dowodu nie wprost wypisujemy ów ostatni następnik. Dowód będzie zakończony, gdy uzyskamy dwa wiersze sprzeczne.

Przykład 1: $p \to (q \to (p \wedge q)$

(1)	p	zał.
(2)	q	zał.
(3)	$\neg(p \wedge q)$	z.d.n.(założenie dowodu nie wprost)
(4)	$(p \wedge q)$	DK: 1,2
		Sprzeczność: 3, 4

Przykład 2: $p \to (q \to ((\neg p \vee s) \to (p \wedge s))))$

(1)	p	zał.
(2)	q	zał.
(3)	$(\neg p \vee s)$	zał.
(4)	$\neg(p \wedge s)$	z.d.n.(założenie dowodu nie wprost)
(5)	s	OA:3,1
(6)	$p \wedge s$	DK:1,5
		Sprzeczność: 4, 6

Zadanie 5

Za pomocą dowodu nie wprost sprawdź, czy poniższe wyrażenia są prawami logiki.

a)
$$(p \equiv q) \to ((p \to s) \to ((s \wedge q) \to (q \to s))))$$

b)
$$p \to (q \to (p \to p \equiv q))$$

c)
$$(r \vee s) \to (p \to (\neg s \to (q \to (r \wedge p))))$$

d)
$$q \to ((\neg q \vee s) \to ((p \wedge \neg s) \to \neg(\neg s \vee q))))$$

Zadanie 6

Dodaj założenie do schematu wnioskowania tak by schemat ten był poprawny (założenie nie może być równoważne z wnioskowiem).

a)

$$\begin{array}{r} p \equiv q \\ r \equiv s \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \hline p \wedge r \equiv q \wedge s \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ -\,-\,-\,-\,- \\ \hline p \to s \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} p \wedge q \wedge r \vee (\neg p \to s) \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \hline p \wedge s \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} \neg((p \to q \vee r) \wedge (s \equiv p)) \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \hline (\neg(p \to q \vee r) \vee \neg(s \equiv p)) \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r} \neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee g \vee l \\ (p \equiv q) \to (r \equiv s) \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \hline (r \to s) \to (\neg l \vee \neg r) \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r} p \wedge q \equiv s \\ s \to \neg q \vee r \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \hline r \wedge g \end{array}$$

Zadanie 7

Sprawdź za pomocą dowolnego sposobu czy poniższe twierdzenia są tautologią(są prawami logiki):

a)

$$((p \vee q) \wedge (q \to p)) \to p$$

b)

$$((r \vee \neg p) \to \neg q) \to ((r \wedge q) \to p)$$

c)

$$((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \to p$$

d)

$$\neg(p \wedge \neg q) \to (p \to q)$$

e)

$$\neg(p \wedge \neg q) \to (\neg p \vee q)$$

f)

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

g)

$$\neg(p \land q \lor r) \to (\neg p \land \neg q \land \neg r)$$

2.5 Zadania dodatkowe

Zadanie 1

Jeśli zdania p, q i r są prawdziwe, a zdania a, b i c są fałszywe, to które z poniższych twierdzeń są prawdziwe?

a)

$$r \lor c \land b \lor q$$

b)

$$\neg(q \lor a) \land \neg(b \lor c)$$

c)

$$\neg a \lor b$$

d)

$$a \to (q \to c)$$

e)

$$\neg((\neg a \lor p) \lor (\neg b \lor c))$$

f)

$$p \land q \lor a \land b$$

g)

$$\neg((a \land (\neg p \lor c)) \lor ((a \land \neg p) \lor (a \land c))$$

h)

$$((a \to b) \to q) \to c$$

i)

$$\neg(((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)) \land \neg((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)))$$

j)

$$\neg(((\neg r \lor c) \land (\neg c \lor r)) \land \neg((r \land c) \lor (\neg r \land \neg c)))$$

k)

$$(p \lor (q \land r)) \land \neg((p \land q) \lor (p \land r))$$

l)

$$(q \lor (\neg a \land \neg p)) \land \neg((q \lor \neg a) \land (q \lor \neg p))$$

Zadanie 2

Zbadaj, które z podanych niżej układów założeń reprezentują sprzeczne układy zdań.

a)

$$(p \wedge \neg r), (p \to q), (q \to r)$$

Odpowiedź:

(1)	$p \wedge \neg r$	zał.
(2)	$p \to q$	zał.
(3)	$q \to r$	zał.
(4)	p	OK: 1
(5)	$\neg r$	OK: 1
(6)	q	RO: 2, 4
(7)	$\neg q$	MT: 3, 5

sprzeczność w 6 i 7

b)

$$(r \wedge \neg q), (p \to q), (r \to p)$$

c)

$$(\neg(q \vee \neg p)), (\neg r \vee q), (p \to r)$$

d)

$$(q \equiv \neg r), (p \to q), (p \wedge r)$$

e)

$$(p \vee \neg q), (r \to q), (\neg p \wedge s), (\neg(s \wedge \neg r))$$

f)

$$(s \to q), (r \to \neg p), (r \vee s), (\neg(p \to q))$$

Zadanie 3

Sprawdź za pomocą metody 0-1, jaka jest wartość logiczna poniższych wyrażeń:

a)

$$q \to (p \to \neg r)$$

b)

$$(\neg q \vee p) \to r$$

c)

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

d)

$$\neg(p \to \neg r) \to \neg q$$

e)

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q))$$

f)

$$((\neg p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q)) \equiv \neg(\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$$

Zadanie 4

Zapisz schematycznie, przy pomocy liter: p, q, r, s następujące zdania, a następnie sprawdź ich poprawność:

a) Dzień jest wtedy i tylko wtedy, gdy widać słońce lub jest przed dwudziestą.

b) Umiem wszystko, więc przejdę do następnego etapu, lub nie umiem wszystkiego, więc nie przejdę do następnego etapu.

c) Mój kot drapie meble lub drapie mnie, wtedy i tylko wtedy, gdy mam spodnie.

d) Pies szczeka, gdy widzi kota lub widzi listonosza lub słyszy dzwonek.

e) Jeśli Jan nie kłamie, to Ania nie mówi prawdy lub Jan i Ania mówią prawdę.

Zadanie 5

Sprawdź w dowolny sposób poprawność poniższych wnioskowań:

a)
Na pewno Hubert lub Elwira odrobili pracę domową, są przecież najlepszymi uczniami w klasie. Skoro Hubert nie odrobił lekcji, to odrobiła je Elwira.

b)
Cecylia zmieni samochód, jeśli wygra loterię. Jeżeli będzie miała nowy samochód, to stary sprzeda na aukcji. A więc, jeśli Cecylia wygra loterię, to sprzeda stary samochód.

c)
Jeżeli na niebie pojawia się tęcza, to wcześniej musiał padać deszcz. Na niebie nie ma tęczy, a więc dzisiaj nie padało.

d)
Jeśli Kolumb odkrył Amerykę lub Marco Polo był w Ameryce, to jeśli Kolumb odkrył Amerykę, to Marco Polo nie był w Ameryce.

e)
Klemens zna wszystkich znajomych Juliana. Większość znajomych Klemensa to nicponie. A zatem większość znajomych Juliana to nicponie.

f)
Real wygra Ligę Mistrzów, tylko wtedy, gdy pokona Borussię. Jeżeli Real nie pokona Borussii, zwycięstwo przypadnie Bayernowi. A więc, jeżeli Real nie wygra Ligii Mistrzów, to wygra ją Bayern.

g)
Zenon mówi, że wszyscy kradną. Skoro Zenon zawsze kłamie, to nikt nie kradnie.

h)
Pies jest zwierzęciem wtedy i tylko wtedy, gdy kot jest zwierzęciem. Wieżowiec jest budynkiem wtedy i tylko wtedy, gdy duża buda jest budynkiem. Pies jest zwierzęciem wtedy i tylko wtedy, gdy duża buda

jest budynkiem. Wieżowiec jest budynkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest budynkiem zrobionym z metalu. A więc pies jest zwierzęciem wtedy i tylko wtedy, gdy jest budynkiem zrobionym z metalu.

i)
Adam ma telefon lub telewizor. Adam nie ma telefonu i nie ma kalkulatora, ma on natomiast kalkulator lub ma telefon. Jeśli Adam ma telefon, to Adam ogląda koty i przegląda memy. A więc Adam przegląda memy lub nie ogląda kotów.

j)
Jeśli Adam i Basia lubią psy lub nie grają w gry, to Adam jest chłopakiem Basi i jedzą kanapki lub nie są na randce. Adam jest chłopakiem Basi wtedy i tylko wtedy, gdy Basia jest dziewczyną Adama. Są na randce i lubią psy i Adam jest chłopakiem Basi. Jeśli jest tak, że Adam jest chłopakiem Basi, to Basia jest dziewczyną Adama, to grają w gry i lubią psy. Jeśli są na randce, to nie jedzą kanapek. A więc, jeśli Basia jest dziewczyną Adama, to Adam jest chłopakiem Basi.

k)
Jan jest studentem. Jan jest studentem i pisze do ciebie w tym zadaniu wtedy i tylko wtedy, gdy pisze ten zbiór w dzień oraz pisze ten zbiór w nocy. Jeśli Jan jest studentem i pisze do ciebie w tym zadaniu, to nie pisze tego zbioru w dzień lub obwinia dziekana za swoje zmęczenie. Jan nie jest studentem lub pisze ten zbiór w nocy. A więc, jeśli Jan jest studentem, to obwinia dziekana za swoje zmęczenie.

l)
Jeśli Polska to kraj i Niemcy to kraj, to Francja to kraj lub Włochy nie są krajem. Jeśli jest tak, że Litwa to kraj, to Holandia to kraj, to jeśli Polska to kraj, to Holandia to kraj. Jeśli Włochy to kraj lub Niemcy to kraj, to Holandia to kraj i Włochy to kraj. A więc, Francja to kraj i Włochy to kraj wtedy i tylko wtedy, gdy Włochy to kraj lub Niemcy to kraj.

m)
Jacek ma samochód, dom, pracę, nie ma konia i nie ma krowy. Jacek nie ma samochodu lub nie ma domu lub jest szczęście lub nie ma pracy lub ma konia lub ma krowę. Jeśli Jacek ma samochód wtedy i tylko wtedy, gdy ma dom, to jest szczęśliwy wtedy i tylko wtedy gdy ma pracę. A więc, jeśli Jacek jest szczęśliwy, to ma pracę, to nie ma krowy lub nie jest szczęśliwy.

n)
Jeśli Arystoteles był mądry, to wie ile ma lat. Jeśli ktoś spał, to nie wie ile ma lat i nie zna swego imienia lub jeśli biegał, to był wysportowany. Biegać i spotkać Kairosa można wtedy i tylko wtedy, gdy nie zna się swego imienia. Jeśli ktoś biega lub nie biega, to spał i jeśli ktoś zna swoje imię, to urodził się dziś. A więc, jeśli ktoś nie urodził się dziś, to Arystoteles jest mądry.

o)
Nauka jest ciekawa lub męcząca i zabiera czas wtedy i tylko wtedy, gdy mamy zainteresowania. Jeśli mamy zainteresowania, to chcemy je rozwijać. Nie chcemy rozwijać zainteresowań lub nie jest tak, że nauka jest męcząca i zabiera nam czas. Jeśli nie mamy zainteresowań, to nauka nie będzie zabierać nam czasu. A więc, jeśli nauka zabiera nam czas, to jest ciekawa i rozwijamy nasze zainteresowania.

p)
Jeśli kot jest grzeczny, to pije i nie drapie. Jeśli Róża to człowiek, to ona pije i jest człowiekiem. Róża jest człowiekiem i nie drapie wtedy i tylko wtedy gdy pije. A więc, jeśli Róża nie jest człowiekiem, to kot jest grzeczny.

Zadanie 6

Sprawdź w dowolny sposób prawdziwość poniższych twierdzeń:

a)

$$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to (r \lor s))$$

b)

$$(p \to q) \land (\neg r \to \neg q) \land (r \to \neg s) \land \neg(p \to \neg s)$$

c)

$$((p \to q) \lor (q \to r) \lor (r \to p)) \equiv ((p \to s) \land (q \to s))$$

d)

$$((((p \to q) \land (q \to r)) \lor (r \to p)) \equiv ((p \to s) \lor (q \to s))) \to s$$

e)

$$(((p \to q) \land r \land p \lor q \lor r) \equiv \neg(p \to q)) \to (\neg(q \lor r) \lor (q \to s) \equiv (r \land p))$$

f)

$$((p \lor \neg q) \to (r \land s)) \to ((r \land s) \land (\neg q \land \neg p))$$

3. Teoria zdań kategorycznych

3.1 Wprowadzenie

Teoria zdań kategorycznych jest jednym z najstarszych systemów logicznych, który został opracowany przez Arystotelesa w IV wieku p.n.e. Stanowi podstawę klasycznej logiki dedukcyjnej i zajmuje się badaniem sposobów poprawnego wnioskowania na podstawie przesłanek. Często, choć nie całkiem precyzyjnie, określa się ją mianem *sylogistyki*, ponieważ kluczowym elementem tej teorii są sylogizmy – specyficzny typ argumentów składających się z dwóch przesłanek i konkluzji, w których związki między terminami są ścisłe i podlegają określonym regułom.

Podstawą sylogistyki są zdania kategoryczne, które w klasycznej logice Arystotelesa opisują relacje między gatunkami przedmiotów. W późniejszych interpretacjach zakresowych odnosi się to także do relacji między zbiorami obiektów. Zdania kategoryczne można podzielić według ich jakości (twierdzące lub przeczące) oraz ilości (ogólne lub szczegółowe). W tradycyjnej logice każde z tych twierdzeń oznaczane jest odpowiednim funktorem, co pozwala na łatwiejsze ich rozróżnianie i analizowanie.

Przyjęcie pierwszych czterech **samogłosek** alfabetu łacińskiego czyli: **a, e, i, o** jako symboli funktorów wynika z tradycji logicznej. Słowo *affirmo* oznacza „twierdzę", a *nego* – „przeczę", co tłumaczy użycie liter **a** i **i** dla zdań twierdzących oraz **e** i **o** dla zdań przeczących. Co więcej, litery **a** oraz **e** odnoszą się do zdań ogólnych, natomiast **i** oraz **o** są używane w odniesieniu do zdań szczegółowych.

Nazwa zdania kategorycznego	oznaczenie	sposób czytania	interpretacja egzystencjalna
ogólno-twierdzące	$S\ a\ P$	Każde S jest P	Nie istnieją S nie będące P
szczegółowo-twierdzące	$S\ i\ P$	Niektóre S są P	Istnieją S będące P
ogólno-przeczące	$S\ e\ P$	Żadne S nie jest P	Nie istnieją S będące P
szczegółowo-przeczące	$S\ o\ P$	Niektóre S nie są P	Istnieją S nie będące P

Przykładem klasycznego sylogizmu jest:

Przesłanka 1:	Każdy ssak jest zwierzęciem. (**M a P**)
Przesłanka 2:	Każdy pies jest ssakiem. (**S a M**)
Konkluzja:	Zatem każdy pies jest zwierzęciem. (**S a P**)

W sylogistyce kluczowe znaczenie mają nie tylko same zdania, ale także ich struktura oraz sposób powiązania terminów. Istnieją różne rodzaje sylogizmów, z których część jest poprawna, a część nie. Sylogizm jest formalnie poprawny, jeśli przejście od przesłanek do wniosku jest logicznie nieuchronne, tzn. niemożliwe jest przejście od prawdziwych przesłanek do fałszywego wniosku. Jednak wnioski mogą być prawdziwe tylko wtedy, gdy przesłanki są prawdziwe.

Terminy w sylogizmie

Terminy w sylogizmie to nazwy, które występują w przesłankach i konkluzji. W klasycznym sylogizmie wyróżniamy trzy terminy:

- **Termin mniejszy (S)** - jest to podmiot konkluzji. W powyższym przykładzie: termin „pies" jest terminem mniejszym.
- **Termin większy (P)** - jest to orzecznik konkluzji. W powyższym przykładzie: termin „zwierzę" jest terminem większym.
- **Termin średni (M)** - jest to pojęcie, które występuje w obu przesłankach, ale nie w konkluzji. W powyższym przykładzie: termin „ssak" jest terminem średnim.

Sylogizm kategoryczny

Sylogizm kategoryczny to wnioskowanie zawierające co najmniej dwie przesłanki, w którym zarówno te przesłanki, jak i wniosek, są zdaniami kategorycznymi. Jeden z terminów, zwany terminem średnim, powtarza się w przesłankach, ale nie występuje w konkluzji, podczas gdy pozostałe terminy nie powtarzają się w przesłankach i występują w konkluzji.

Tryb sylogistyczny

Tryb sylogistyczny to schemat wnioskowania będący sylogizmem kategorycznym. Innymi słowy, zastępując w sylogizmie kategorycznym występujące w nim stałe pozalogiczne (nazwowe) przez symbole odpowiednich zmiennych, otrzymujemy tryb sylogistyczny. Trybem sylogistycznym nazywa się też implikację odpowiadającą temu schematowi wnioskowania.

Tradycyjnie orzecznik wniosku nazywa się terminem większym (*terminus maior*), a podmiot wniosku — terminem mniejszym (*terminus minor*). Analogicznie przesłankę zawierającą termin większy nazywa się przesłanką większą, a przesłankę zawierającą termin mniejszy — przesłanką mniejszą. Przyjmując umowę, że przesłanka większa jest umieszczana jako pierwsza, a przesłanka mniejsza jako druga, ze względu na położenie terminu średniego, odróżnia się następujące cztery figury sylogistyczne:

I	**II**	**III**	**IV**
M—P	P—M	M—P	P—M
S—M	S—M	M—S	M—S
S—P	S—P	S—P	S—P

Każdy tryb poprawy określa taki sposób powiązania przesłanek i konkluzji, który umożliwia prowadzenie poprawnych wnioskowań. Istnieje określona liczba poprawnych trybów sylogistycznych, których jest dokładnie **24** spośród 256 możliwych. Poniżej przedstawione są sposoby badania, czy tryb sylogistyczny jest poprawny.

3.2 Prawa wnioskowania bezpośredniego

Wnioskowanie bezpośrednie w sylogistyce polega na uzyskaniu nowego wniosku na podstawie pojedynczej przesłanki, bez konieczności użycia dodatkowych zdań. Proces ten opiera się na określonych prawach logicznych. Jednym z kluczowych pojęć dotyczących wnioskowania bezpośredniego jest kwadrat logiczny, który ilustruje relacje między czterema typami zdań kategorycznych. Prawa kwadratu logicznego określają ich wzajemne zależności: **prawo sprzeczności, prawo podporządkowania, prawo przeciwieństwa i prawo podprzeciwieństwa**. W ramach sylogistyki wyróżnia się także kilka innych podstawowych typów wnioskowania bezpośredniego, takich jak **konwersja prosta, konwersja z ograniczeniem, obwersja**. Każde z tych przekształceń podlega określonym regułom, które gwarantują logiczną poprawność przeprowadzanych wnioskowań.

Prawa kwadratu logicznego

Prawa sprzeczności

$$S\ a\ P \equiv \sim S\,o\,P \qquad S\ o\ P \equiv \sim S\,a\,P$$
$$S\ e\ P \equiv \sim S\,i\,P \qquad S\ i\ P \equiv \sim S\,e\,P$$

Pierwsze z nich stwierdza, że zdanie „każde S jest P” jest równoważne zdaniu „Nie jest tak, że niektóre S nie są P”; np."Każdy kot jest ssakiem" jest równoważne "Nie jest tak, że niektóre koty nie są ssakami". Dwa zdania są więc sprzeczne wtedy, gdy nie są one zarazem prawdziwe ani nie są zarazem fałszywe.

Prawa podporządkowania

Stwierdzają, że ze zdań ogólnych wynikają zdania szczegółowe o tej samej jakości (ale nie odwrotnie). Warunkiem prawdziwości tych implikacji jest jednak założenie, że terminy w tych zdaniach nie są puste. Prawdziwe są zatem następujące implikacje:

$$S\ a\ P \rightarrow S\,i\,P$$
$$S\ e\ P \rightarrow S\,o\,P$$

Prawdziwe więc jest na przykład stwierdzenie: Jeśli każdy kot jest ssakiem, to niektóre koty są ssakami (ale oczywiście ze zdania "Niektóre koty są czarne" nie wynika zdanie "Każdy kot jest czarny").

Prawo przeciwieństwa

Prawo to stwierdza związek między odpowiadającymi sobie zdaniami ogólnymi o przeciwnej jakości i ma następującą postać:

$$\sim (S\ a\ P \wedge S\,e\,P)$$

Dwa zdania są przeciwne, gdy oba nie są zarazem prawdziwe, ale oba mogą być naraz fałszywe, np. z pary zdań przeciwnych: "Każdy kot jest ssakiem" oraz "Żaden kot nie jest ssakiem" jedno jest prawdziwe, a z pary zdań przeciwnych: "Każdy ssak jest kotem" oraz "Żaden ssak nie jest kotem", oba zdania są fałszywe.

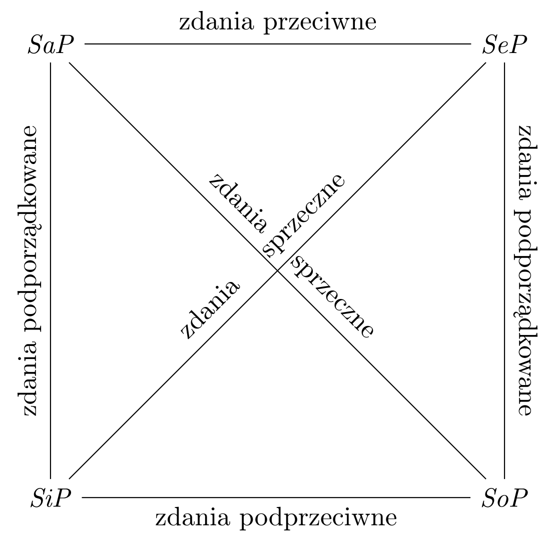
Prawo podprzeciwieństwa

Prawo to z kolei stwierdza zależność między odpowiadającymi sobie zdaniami szczegółowymi o przeciwnej jakości i ma następującą postać:

$$S\ i\ P \vee S\,o\,P$$

Mówimy, że dwa zdania są podprzeciwne, gdy oba nie są zarazem fałszywe, ale oba mogą być prawdziwe. Tak więc w parze zdań: "Niektóre koty są ssakami" i "Niektóre koty nie są ssakami", jedno ze zdań jest prawdziwe, podczas gdy w parze zdań: "Niektóre ssaki są kotami" oraz "Niektóre ssaki nie są kotami", oba zdania są prawdziwe.

Wszystkie wymienione tu zależności tradycyjnie przedstawione mogą być w postaci tzw. kwadratu logicznego. Termin „kwadrat logiczny” bywa stosowany także poza teorią zdań kategorycznych na oznaczenie diagramu ukazującego zależności między czterema rodzajami zdań, takimi, że po przekątnych kwadratu występuje stosunek sprzeczności, z góry w dół – stosunek podporządkowania, między „górną” parą zdań – stosunek przeciwieństwa, a między „dolną” parą – stosunek podprzeciwieństwa. Mówimy więc o kwadracie zdań modalnych, kwadracie zdań z kwantyfikatorami.



Prawa konwersji

Następną grupą praw są tzw. prawa konwersji (łac. converso — odwracam). Polegają one na zmianie miejsc podmiotu i orzecznika w zdaniu kategorycznym przy zachowaniu twierdzącej lub przeczącej jakości tego zdania. Odróżnia się konwersję prostą (conversio simplex) oraz konwersję z ograniczeniem (conversio per accidens).

Konwersja prosta

Podlegają jej zdania ogólno-przeczące i zdania szczegółowo-twierdzące. Stosowne prawa mają postać:

$$S\ e\ P \equiv P\,e\,S$$
$$S\ i\ P \equiv P\,i\,S$$

A zatem stwierdzenie np. "Żaden człowiek nie jest osłem" jest równoważne stwierdzeniu "Żaden osioł nie jest człowiekiem", a zdanie "Niektórzy ludzie są mężczyznami" jest równoważne ze zdaniem "Niektórzy mężczyźni są ludźmi".

Konwersja z ograniczeniem

Prawa należące do tej kategorii mają postać następujących implikacji:

$$S\ a\ P \rightarrow P\,i\,S$$
$$S\ e\ P \rightarrow P\,o\,S$$

Konwersji z ograniczeniem podlegają zatem zdania ogólne. Np. skoro prawdziwe jest zdanie "Każdy prokurator jest prawnikiem" to i prawdziwe jest zdanie "Niektórzy prawnicy są prokuratorami". Widzimy, że w następnikach praw konwersji z ograniczeniem występuje zdanie szczegółowe; nie jest zatem prawdą np. implikacja "Jeżeli każdy prawnik jest człowiekiem, to każdy człowiek jest prawnikiem".

Prawa obwersji

We wnioskowaniach czasem możemy mieć do czynienia z sytuacją, że w jednej z przesłanek występuje jakiś termin, a w drugiej nazwa sprzeczna względem niego (taka jak np. nie-prawnik). Zamianę zdań z nazwami sprzecznymi względem terminów wyjściowych na odpowiadające im zdania z tymi terminami pozytywnymi umożliwia operacja zwana obwersją (łac. obverto — zwracam się przeciw). Obwersja jest to przekształcenie zdania kategorycznego na zdanie o tej samej ilości, przeciwnej jakości i zanegowanym orzeczniku. Prawami obwersji są następujące równoważności (symbol „$-P$” odczytujemy „nie P”):

$$S\ a\ P \equiv S\,e\ -P$$
$$S\ e\ P \equiv S\,a\ -P$$
$$S\ i\ P \equiv S\,o\ -P$$
$$S\ o\ P \equiv S\,i\ -P$$

3.3 Sposoby badania poprawności trybów sylogistycznych

Sposób I. Nazwy trybów niezawodnych

Nazwy trybów niezawodnych są częścią wiersza autorstwa Piotra Hiszpana (późniejszy papież Jan XXI). Poprawne są te tryby, których nazwy (imię) znajdują się w poniższym wierszu. Każda z nazw trybów zawiera w sobie litery (są one samogłoskami), które oznaczają rodzaj przesłanek i konkluzji. Na przykład, tryb B **a** rb **a** r **a** (a-a-a) składa się z trzech zdań ogólnych twierdzących, a tryb C **e** l **a** r **e** nt (e-a-e) składa się z dwóch zdań ogólnych przeczących i jednego zdania ogólnego twierdzącego.

Pełny wiersz:

Barbara, *Celarent*, *Darii*, *Ferio* (que prioris)
Cesare, *Camestres*, *Festino*, *Baroco* (secundae).
(Tertia) *Darapti*, *Felapton*, *Disamis*, *Datisi*,
Bocardo, *Ferison* (habet. Quarta insuper addit)
Bamalip, *Camenes*, *Dimatis*, *Fesapo*, *Fresison*

Przykład odczytania trybu sylogistycznego

Zajmiemy się trybem sylogistycznym **Fesapo**, który należy do czwartej figury, co oznacza, że termin średni (M) występuje najpierw w pozycji orzecznika (P-M), a następnie w pozycji podmiotu (M-S) w przesłankach, podczas gdy konkluzja ma strukturę S-P (podmiot-orzecznik). Schemat czwartej figury:

$$\begin{array}{c} \text{IV} \\ \text{P—M} \\ \text{M—S} \\ \hline \text{S—P} \end{array}$$

Jak już wiemy, w trybach sylogistycznych powinny nas interesować samogłoski, które są jasnym wskazaniem, jakiego rodzaju zdania kategorycznego powinniśmy użyć. W przypadku trybu **Fesapo** samogłoski (funktory zdań kategorycznych) występują w następującej kolejności: **e, a, o**.

Schemat trybu Fesapo

- **e**: „Żadne P nie jest M" (przesłanka większa)
- **a**: „Wszystkie M są S" (przesłanka mniejsza)
- **o**: „Niektóre S nie są P" (wniosek)

Zatem, tryb Fesapo można zapisać jako:

$$\begin{array}{c} P\ e\ M \\ M\ a\ S \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

Przykład zdania

- **Przesłanka większa (e)**: „Żadna ryba nie jest ssakiem."
- **Przesłanka mniejsza (a)**: „Wszystkie ssaki są psami."
- **Wniosek (o)**: „Niektóre psy nie są rybami."

Sposób II. Diagramy Venna

Każdy sylogizm można zapisać na różne sposoby, z których jednym jest przedstawienie go za pomocą schematu wnioskowania. Na przykład sylogizm, o którym mówiliśmy wcześniej, może być zapisany jako:

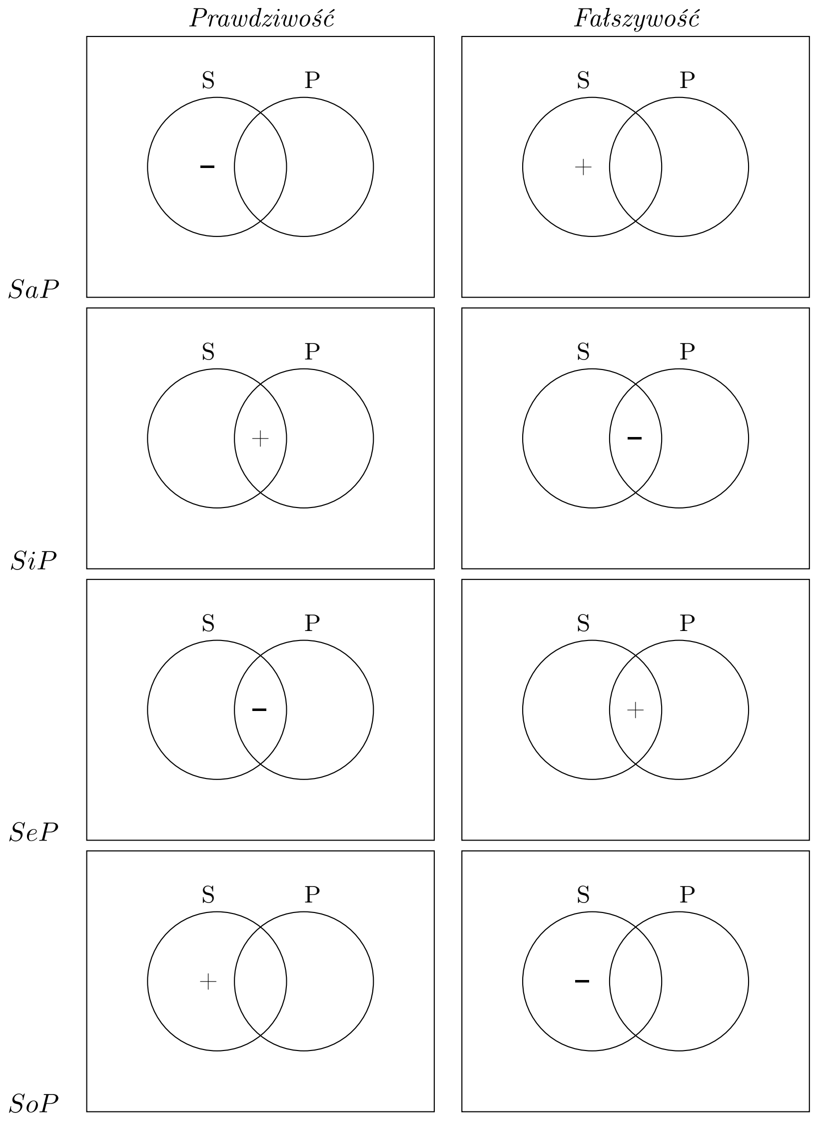
$$\begin{array}{c} P\ e\ M \\ M\ a\ S \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

W każdym przypadku taki schemat wnioskowania odpowiada implikacji, w której warunki wstępne to poprzednik, a wynik to następnik. W przypadku wspomnianego wcześniej schematu, ta implikacja ma formę:

$$(PeM \wedge MaS) \rightarrow SoP$$

Aby ocenić, czy sylogizm jest poprawnym schematem wnioskowania, musimy przyjąć, że warunki wstępne są prawdziwe. Ponieważ są one połączone koniunkcją, składniki tej koniunkcji muszą być prawdziwe. Następnie naniesiemy te informacje o prawdziwości na diagram Venna. Prawdziwość wniosku nie jest jednak bezpośrednio wskazywana na diagramie. Powinna wynikać ona w sposób logiczny z przesłanek, które zostały już zaznaczone na diagramie.

Diagramy Venna służą do przedstawiania pustości lub niepustości zbiorów. Zbiór uznaje się za pusty, jeśli nie zawiera żadnych elementów. Na diagramie Venna pustość zbioru ilustruje się symbolem (−) w odpowiednim obszarze, a alternatywnie można ten obszar wykreślić. Z kolei niepustość zbioru zaznacza się symbolem (+), co wskazuje na obecność elementów w zbiorze. Dzięki temu diagramy Venna pozwalają na wizualizację prawdziwości lub fałszywości zdań kategorycznych.



Sposób III. Warunki formalnej poprawności

Innym sposobem oceny poprawności trybów sylogistycznych jest analiza ich zgodności z zasadami formalnej (strukturalnej) poprawności. Jeśli dany tryb sylogistyczny nie spełnia któregokolwiek z siedmiu określonych warunków (a w przypadku sylogizmu także dodatkowego, ósmego warunku), oznacza to, że nie można uznać go za formalnie poprawny.

I. 1. Obie przesłanki nie mogą być przeczące.
   2. Jeżeli jedna z przesłanek jest przecząca, to wniosek musi być przeczący.
   3. Jeżeli wniosek jest przeczący, to i jedna z przesłanek musi być przecząca.

II. 1. Obie przesłanki nie mogą być szczegółowe.
   2. Jeżeli jedna z przesłanek jest szczegółowa, to i wniosek musi być szczegółowy.

III. 1. Termin średni musi być wzięty w całym zakresie przynajmniej w jednej z przesłanek.
   2. Jeżeli jakiś termin jest wzięty w całym zakresie we wniosku, to musi być wzięty w całym zakresie i w przesłance.

W przypadku sylogizmów dodaje się jeszcze ósmy warunek, który wymaga, aby każdy użyty w nich termin zachowywał to samo znaczenie za każdym razem.

Wymieniając warunki poprawności trybu sylogistycznego, w punkcie III, posłużyliśmy się określeniem „termin wzięty w całym zakresie" (inaczej „rozłożony" lub „dystrybuowany"). Oznacza to, że taki termin powinien występować jako podmiot zdania ogólnego (bez względu na jego charakter – twierdzący lub przeczący) lub jako orzecznik zdania przeczącego (niezależnie od tego, czy zdanie jest ogólne, czy szczegółowe).

Stosując przed podmiotem zdania ogólnego słowo „każdy", zaznaczamy, że obejmuje ono wszystkie desygnaty, czyli cały zakres podmiotu. Podobnie w przypadku orzecznika zdania przeczącego – choć nie poprzedzamy go słowem „żaden", zawsze istnieje możliwość jego dodania. W pełnym rozwinięciu zdania przeczącego należałoby je odczytać jako „Każdy S nie jest żadnym P" (SeP) oraz „Niektóre S nie są żadnym P" (SoP), np. „Niektóre koty nie są żadnymi psami." Terminy wzięte w całym zakresie są zaznaczane.

$$\begin{array}{cc} \underline{S}\ a\ P & \underline{S}\ e\ \underline{P} \\ S\ i\ P & S\ o\ \underline{P} \end{array}$$

3.4 Zadania

1. Zbadaj poprawność poniższych schematów wnioskowania, korzystając z diagramów Venna oraz warunków formalnej poprawności trybów sylogistycznych.

a) $$\begin{array}{c} P\ a\ M \\ S\ o\ M \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

Rozwiązanie: Wnioskowanie to odpowiada wyrażeniu zdaniowemu (zgodnie z zasadą, że każdemu schematowi wnioskowania odpowiada implikacja, której poprzednikiem jest koniunkcja przesłanek, a następnikiem jego wniosek):

$$(P\ a\ M) \wedge (S\ o\ M) \rightarrow S\ o\ P$$

Aby zbadać poprawność tego trybu sylogistycznego, rozpoczynamy od przyjęcia prawdziwości poprzednika rozważanej implikacji. Ponieważ poprzednik stanowi koniunkcję, oba jego składniki muszą być prawdziwe. Reprezentujemy tę sytuację na diagramie Venna, nie nanosząc jednak prawdziwości wniosku. **Diagram dla prawdziwości wniosku powinien w sposób jednoznaczny wynikać z diagramu przedstawiającego prawdziwość przesłanek.**

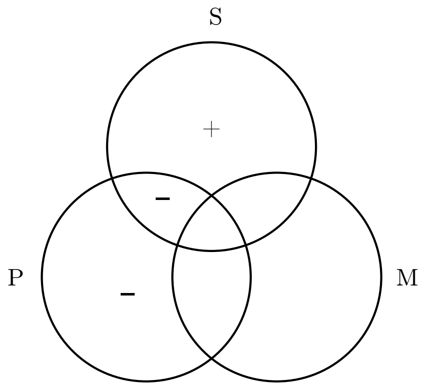
Krok 1. Reprezentacja przesłanek na diagramie Venna

Rozpoczynając reprezentację prawdziwości przesłanek, zaczynamy od przesłanki ogólnej, a następnie korzystamy z przesłanki szczegółowej. Dla uproszczenia możemy pominąć rysowanie uniwersum.

- **Przesłanka 1:** $P\ a\ M$ (Każde P jest M) Oznacza to, że cała klasa P jest zawarta w klasie M. Na diagramie Venna obszar P poza M zostaje wykreślony znakiem (-), ponieważ nie istnieją elementy P, które nie są M. Każdy obiekt, który jest P, musi być również elementem M, co oznacza, że zbiór P jest podzbiorem M.

- **Przesłanka 2:** $S\ o\ M$ (Niektóre S nie są M) Oznacza to, że istnieją elementy należące do S, które nie znajdują się w M. Na diagramie Venna zaznaczamy obecność takich elementów, umieszczając znak (+) w obszarze S poza M. Warto zauważyć, że znak (+) moglibyśmy postawić również w części wspólnej S oraz P poza M, natomiast w tym przypadku obszar ten jest już wykreślony ze względu na przesłankę pierwszą.

Krok 2. Rysujemy diagram Venna



Krok 3. Analiza wniosku

- Wiemy, że P całkowicie zawiera się w M ($P\ a\ M$), co oznacza, że wszystkie elementy P należą do M, a więc P nie posiada żadnych elementów poza M.
- Wiemy również, że istnieje część S, która nie należy do M ($S\ o\ M$). Oznacza to, że istnieje pewna część zbioru S, która istnieje poza zbiorem M.

Na podstawie diagramu Venna, aby wniosek $S\ o\ P$ (Niektóre S nie są P) był prawdziwy, w obszarze reprezentującym S, który nie jest częścią P, musi pojawić się znak (+). Z analizy wynika, że taki znak występuje, w związku z tym, wnioskowanie jest poprawne, ponieważ przesłanki jednoznacznie prowadzą do prawdziwości wniosku. **Tryb sylogistyczny jest więc niezawodny w tym przypadku. (Baroco)**

Każdy tryb można również sprawdzić przy pomocy warunków formalnej poprawności trybów sylogistycznych. W tym przypadku sylogizm spełnia wszystkie warunki poprawności, ponieważ:

- Tylko jedna z przesłanek jest przecząca, a wniosek również jest przeczący. ✓
- Tylko jedna z przesłanek jest szczegółowa, a wniosek również jest szczegółowy. ✓
- Termin średni jest wzięty w całym zakresie w drugiej przesłance. Natomiast termin P, wzięty w całym zakresie we wniosku, jest również wzięty w całym zakresie w pierwszej przesłance. ✓

b) $$\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ i\ M \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

Rozwiązanie: Tak jak w poprzednim przykładzie zapisujemy stosowne wyrażenie zdaniowe.

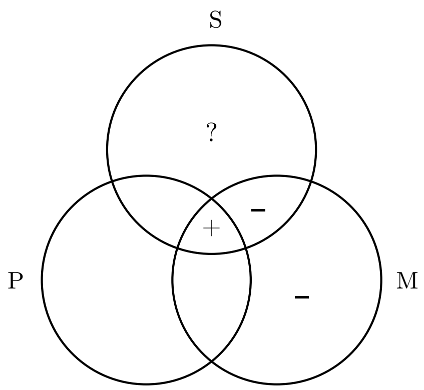
$$(M\ a\ P) \wedge (S\ i\ M) \rightarrow S\ o\ P$$

Zakładamy prawdziwość poprzednika implikacji i reprezentujemy tę sytuację na diagramie Venna, nie nanosząc prawdziwości wniosku.

Krok 1. Reprezentacja przesłanek na diagramie Venna

- **Przesłanka 1:** $M\ a\ P$ (Każde M jest P) Oznacza to, że cała klasa M jest zawarta w klasie P. Na diagramie Venna obszar M poza P zostaje wykreślony znakiem (-), ponieważ nie istnieją elementy M, które nie są P. Każdy obiekt, który jest M, musi być również elementem P, co oznacza, że zbiór M jest podzbiorem P.
- **Przesłanka 2:** $S\ i\ M$ (Niektóre S są M) Oznacza to, że istnieją elementy należące do S, które znajdują się w M. Na diagramie Venna zaznaczamy obecność takich elementów, umieszczając znak (+) w obszarze S znajdującym się wewnątrz M. W tym przypadku znak (+) możemy postawić tylko w części wspólnej wszystkich zbiorów.

Krok 2. Rysujemy diagram Venna



Krok 3. Analiza wniosku

Na podstawie diagramu Venna, aby wniosek $S\ o\ P$ (Niektóre S nie są P) był prawdziwy, w obszarze reprezentującym S, który nie jest częścią P, musi pojawić się znak (+). Jednakże, z analizy diagramu wynika, że w obszarze S, który nie jest częścią P, niekoniecznie znak (+) musi występować. Przesłanka $S\ i\ M$ jedynie wskazuje, że część S należy do M, ale nie dostarcza wystarczających informacji o relacji między S a P. W związku z tym, wniosek $S\ o\ P$ (Niektóre S nie są P) nie musi być prawdziwy w każdej możliwej sytuacji, a ten **tryb sylogistyczny nie jest niezawodny**.

Zawodność trybu możemy wykazać sprawdzając go pod kątem formalnej poprawności.

- Obie przesłanki nie są przeczące. ✓
- Tylko jedna z przesłanek jest szczegółowa, a wniosek również jest szczegółowy. ✓
- Termin średni jest wzięty w całym zakresie w pierwszej przesłance. Natomiast termin P, który jest wzięty w całym zakresie we wniosku, nie jest wzięty w całym zakresie w żadnej przesłance. ✗

Zgodnie z powyższym rozumowaniem **tryb sylogistyczny nie może być poprawny.**

c) $$\begin{array}{c} P\ e\ M \\ S\ a\ M \\ \hline S\ e\ P \end{array}$$

Rozwiązanie: Odpowiadające schematowi wnioskowania wyrażenie zdaniowe to:

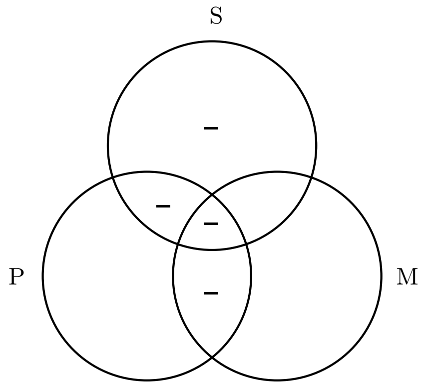
$$(P\ e\ M) \wedge (S\ a\ M) \to S\ e\ P$$

Zakładamy prawdziwość poprzednika implikacji i reprezentujemy tę sytuację na diagramie Venna, nie nanosząc prawdziwości wniosku.

Krok 1. Reprezentacja przesłanek na diagramie Venna

- **Przesłanka 1:** $P\ e\ M$ (Żadne P nie są M) Oznacza to, że żadne elementy należące do P nie należą do M. Na diagramie Venna obszar P, który nakładałby się na M, zostaje wykreślony znakiem (-), ponieważ nie istnieje część wspólna dla P i M. W rezultacie obszar P nie może mieć żadnego wspólnego elementu z M.
- **Przesłanka 2:** $S\ a\ M$ (Każde S są M) Oznacza to, że cała klasa S jest zawarta w klasie M. Na diagramie Venna obszar S poza M zostaje wykreślony znakiem (-), ponieważ nie istnieją elementy S, które nie są M. Każdy obiekt, który jest S, musi być również elementem M, co oznacza, że zbiór S jest podzbiorem M.

Krok 2. Rysujemy diagram Venna



Krok 3. Analiza wniosku

Na podstawie diagramu Venna, aby wniosek $S\ e\ P$ (Żadne S nie są P) był prawdziwy, obszar reprezentujący S nie może mieć żadnych wspólnych elementów z obszarem reprezentującym P. Ponieważ z przesłanek wynika, że S jest zawarte w M, a P i M są rozłączne (żadne elementy P nie należą do M), S i P nie mogą mieć elementów wspólnych. Dlatego wniosek $S\ e\ P$ jest prawdziwy, ponieważ S i P rzeczywiście nie mają żadnych wspólnych elementów. W związku z tym, ten **tryb sylogistyczny jest poprawny (Cesare)**.

Tryb możemy sprawdzić przy pomocy warunków formalnej poprawności. W tym przypadku spełnia on wszystkie warunki poprawności, ponieważ:

- Tylko jedna z przesłanek jest przecząca, a wniosek również jest przeczący. ✓
- Żadna z przesłanek nie jest szczegółowa. ✓
- Termin średni jest wzięty w całym zakresie w pierwszej przesłance. Termin P wzięty jest w całym zakresie w pierwszej przesłance a S w drugiej przesłance. Odpowiada to terminom wziętym w całym zakresie we wniosku. ✓

d) $\begin{array}{c} M\ e\ P \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ o\ P \end{array}$ e) $\begin{array}{c} M\ a\ P \\ \underline{S\ i\ M} \\ S\ i\ P \end{array}$ f) $\begin{array}{c} M\ a\ P \\ \underline{M\ i\ S} \\ S\ o\ P \end{array}$ g) $\begin{array}{c} P\ a\ M \\ \underline{M\ e\ S} \\ S\ e\ P \end{array}$

h) $\begin{array}{c} M\ e\ P \\ \underline{S\ a\ M} \\ S\ o\ P \end{array}$ i) $\begin{array}{c} M\ o\ P \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ o\ P \end{array}$ j) $\begin{array}{c} P\ i\ M \\ \underline{M\ i\ S} \\ S\ i\ P \end{array}$ k) $\begin{array}{c} P\ i\ M \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ i\ P \end{array}$

l) $\begin{array}{c} P\ a\ M \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ i\ P \end{array}$ m) $\begin{array}{c} M\ a\ P \\ \underline{S\ a\ M} \\ S\ i\ P \end{array}$ n) $\begin{array}{c} P\ a\ M \\ \underline{M\ o\ S} \\ S\ o\ P \end{array}$ o) $\begin{array}{c} M\ a\ P \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ i\ P \end{array}$

2. Znajdź wniosek (w oparciu o diagramy Venna) na podstawie następujących przesłanek:

a) Wszystkie psy są wierne.
Żadne koty nie są wierne.

Rozwiązanie:

Krok 1. Zastępujemy nazwy w przesłankach za pomocą odpowiednich zmiennych oraz uzupełniamy zwroty kwantyfikujące.

W języku polskim istnieją pewne intuicyjne zasady dotyczące wyrażania ogólności i szczegółowości zdań. Jeśli w zdaniu występuje rzeczownik w liczbie mnogiej, zwykle odnosi się ono do całej grupy, dlatego często dodaje się słowo „każdy” czy „wszystkie”, aby to podkreślić. Natomiast w zdaniach szczegółowych stosuje się określenia takie jak „niektóre” czy „pewne” lub zamienia czasownik „jest” na „bywa”, co sugeruje, że twierdzenie nie dotyczy wszystkich przypadków.

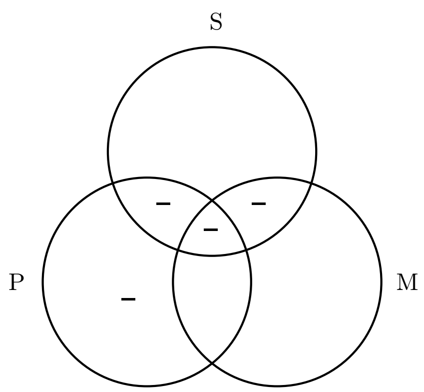
Zatem, jeśli „kot” oznaczymy jako S, „pies” jako P, a „wierny” jako M, to zdanie ogólne przyjmie formę „Wszystkie psy są wierne”, natomiast zdanie szczegółowe można zapisać jako „Żadne koty nie są wierne”. W ten sposób uwzględniamy odpowiednią kwantyfikację i unikamy niejednoznaczności w interpretacji.

- „psy” $= P$
- „wierne” $= M$ (termin średni)
- „koty” $= S$

Pierwsza przesłanka: Wszystkie psy są wierne $\quad\Rightarrow\quad P\,a\,M$
Druga przesłanka: Żadne koty nie są wierne $\quad\Rightarrow\quad S\,e\,M$

$$\begin{array}{c} P \ a \ M \\ S \ e \ M \\ \hline ? \end{array}$$

Krok 2. Rysujemy diagram Venna:



Krok 3. Analizujemy relacje między zbiorami:

- Z pierwszej przesłanki wynika, że wszystkie psy (zbiór P) są wierne (zbiór M). Oznacza to, że zbiór P jest w całości zawarty w zbiorze M. W diagramie Venna należy umieścić minus (-) w tej części zbioru P, która nie zachodzi na zbiór M. Wszystkie elementy zbioru P należą do zbioru M, więc poza częścią wspólną P i M, zbiór P nie zawiera żadnych innych elementów.
- Z drugiej przesłanki wynika, że żadne koty (zbiór S) nie są wierne (zbiór M). Oznacza to, że zbiór S nie ma żadnych elementów wewnątrz zbioru M. W diagramie Venna, w części wspólnej S i M, należy umieścić minus (-), ponieważ nie ma żadnych elementów, które należałyby jednocześnie do zbioru S i M.

Łatwo zauważyć, że zbiór S (koty) nie ma żadnej części wspólnej z P (psy), więc zdanie $S\ e\ P$ jest prawdziwe. Na podstawie powyższego rozumowania możemy wyciągnąć wniosek, że szukane zdanie to:

"Żadne koty nie są psami."

b) Wszystkie samochody elektryczne są przyjazne dla środowiska.
Niektóre pojazdy są samochodami elektrycznymi.

Rozwiązanie:

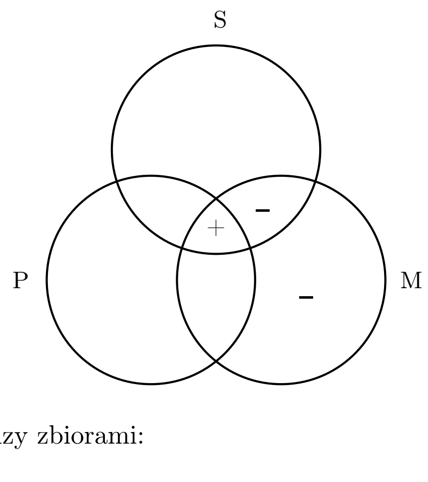
Krok 1. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, zastępujemy nazwy w przesłankach za pomocą odpowiednich zmiennych oraz uzupełniamy zwroty kwantyfikujące:

- „samochody elektryczne” $= M$ (termin średni)
- „przyjazne dla środowiska” $= P$
- „pojazdy” $= S$

Pierwsza przesłanka: Wszystkie samochody elektryczne są przyjazne dla środowiska $\Rightarrow$ $M\,a\,P$.
Druga przesłanka: Niektóre pojazdy są samochodami elektrycznymi $\Rightarrow$ $S\,i\,M$.

$$\frac{\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ i\ M \end{array}}{?}$$

Krok 2. Rysujemy diagram Venna:



Krok 3. Analizujemy relacje między zbiorami:

- Z pierwszej przesłanki wynika, że wszystkie samochody elektryczne (zbiór M) są przyjazne dla środowiska (zbiór P). Oznacza to, że zbiór M jest w całości zawarty w zbiorze P. W diagramie Venna należy umieścić minus (-) w tej części zbioru M, która nie zachodzi na zbiór P. Wszystkie elementy zbioru M należą do zbioru P, więc poza częścią wspólną M i P, zbiór M nie zawiera żadnych innych elementów.
- Z drugiej przesłanki wynika, że niektóre pojazdy (zbiór S) są samochodami elektrycznymi (zbiór M). Oznacza to, że istnieje część wspólna między zbiorami S i M, czyli istnieje przynajmniej jeden element w zbiorze S, który należy do zbioru M. Wpisujemy $(+)$ w części wspólnej zbiorów.

Zatem zbiór S (pojazdy) ma część wspólną ze zbiorem P (przyjazne dla środowiska), ponieważ niektóre pojazdy są samochodami elektrycznymi, a wszystkie samochody elektryczne są przyjazne dla środowiska. Na podstawie powyższego rozumowania oraz analizy diagramu Venna, możemy wyciągnąć wniosek, że zdanie $S\ i\ P$ jest prawdziwe, więc szukane zdanie to:

"Niektóre pojazdy są przyjazne dla środowiska."

c) Żadna rybka akwariowa nie lubi słodyczy.
Niektórzy ludzie lubią słodycze.

Rozwiązanie:

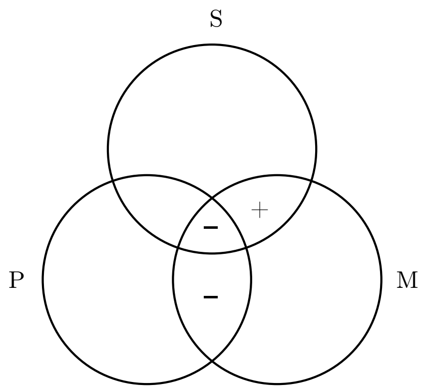
Krok 1. Zastępujemy nazwy w przesłankach za pomocą odpowiednich zmiennych oraz uzupełniamy zwroty kwantyfikujące:

- „rybki akwariowe” $= P$
- „lubiący słodycze” $= M$ (termin średni)
- „ludzie” $= S$

Pierwsza przesłanka: Żadna rybka akwariowa nie lubi słodyczy $\Rightarrow$ $P\,e\,M$.
Druga przesłanka: Niektórzy ludzie lubią słodycze $\Rightarrow$ $S\,i\,M$.

$$\begin{array}{c} P\ e\ M \\ S\ i\ M \\ \hline ? \end{array}$$

Krok 2. Rysujemy diagram Venna:



Krok 3. Analizujemy relacje między zbiorami:

- Z pierwszej przesłanki wynika, że żadna rybka akwariowa (zbiór P) nie lubi słodyczy (zbiór M). Oznacza to, że zbiór P nie ma żadnych elementów wewnątrz zbioru M. W diagramie Venna, w części wspólnej P i M, należy umieścić minus (-), ponieważ nie ma żadnych elementów, które należałyby jednocześnie do zbioru P i M.
- Z drugiej przesłanki wynika, że niektórzy ludzie (zbiór S) lubią słodycze (zbiór M). Oznacza to, że istnieje część wspólna między zbiorami S i M, czyli co najmniej jeden element zbioru S należy także do zbioru M. Należy, więc zapisać znak (+) w części wspólnej zbiorów S i M.

Zatem zbiór P (rybki akwariowe) nie ma żadnej części wspólnej ze zbiorem M (lubią słodycze), podczas gdy zbiór S (ludzie) częściowo pokrywa się ze zbiorem M. Plus, który znajduje się w części wspólnej zbioru S (ludzie) oraz M (lubią słodycze), wskazuje, że istnieją elementy S, które nie należą jednocześnie do zbioru P (rybki akwariowe). Na podstawie powyższego rozumowania możemy wyciągnąć wniosek $S\ o\ P$. Szukane zdanie to:

„Niektórzy ludzie nie są rybkami akwariowymi."

d) Wszystkie miasta nadmorskie są turystyczne.
Niektóre nadmorskie miejscowości to małe wioski.

e) Wszyscy malarze są artystami.
Żaden artysta nie jest królikiem.

f) Każdy samochód się psuje.
Niektóre motorowery się nie psują.

g) Żaden fan teorii spiskowych nie jest osobą racjonalną.
Wszyscy logicy są osobami racjonalnymi.

h) Żaden wampir nie lubi słońca.
Niektórzy ludzie są wampirami.

i) Każdy pingwin jest ptakiem.
Żaden pingwin nie lata.

j) Żaden kwadrat nie ma trzech boków.
Niektóre trójkąty są równoboczne.

k) Niektórzy nauczyciele noszą garnitury.
Każdy kto nosi garnitur jest elokwentny.

l) Niektóre komputery są szybkie.
Każdy komputer jest maszyną.

m) Żadne psy nie jedzą czekoladek.
Niektóre psy są dalmatyńczykami.

n) Wszyscy studenci to osoby posiadające legitymacją studencką.
Każdy student jest miłośnikiem logiki.

o) Żaden domownik nie zostawia włączonego żelazka.
Każdy monter gazowy jest domownikiem.

3. Zbadaj za pomocą diagramów Venna, czy poniższe wnioskowania (sylogizmy) są poprawne.

a)

Szczegółowe książki są kosztowne.
Encyklopedie są szczegółowe.

Encyklopedie są kosztowne.

Rozwiązanie: Zadania tego typu do złudzenia przypominają przykłady z pierwszego ćwiczenia. Jednak tym razem mamy za zadanie stwierdzić czy wnioskowanie jest poprawne na podstawie zdań w języku naturalnym. Pierwszym krokiem będzie przekształcenie zdań na formę sylogizmów w zadaniu pierwszym.

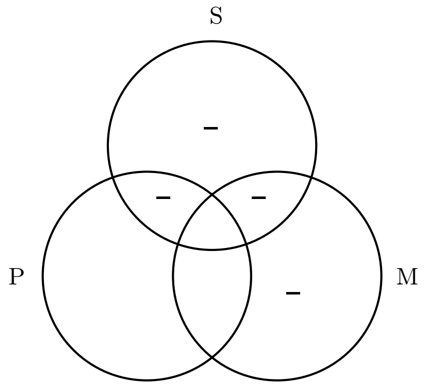
Krok 1. Przekształcenie zdań z języka naturalnego na schematy wnioskowań.

- „szczegółowe książki” $= M$ (termin średni)
- „kosztowne książki” $= P$
- „encyklopedie” $= S$

Pierwsza przesłanka: Szczegółowe książki są kosztowne $\Rightarrow$ $M\,a\,P$
Druga przesłanka: Encyklopedie są szczegółowe $\Rightarrow$ $S\,a\,M$
Wniosek: Encyklopedie są kosztowne $\Rightarrow$ $S\,a\,P$

$$\frac{\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ a\ M \end{array}}{S\ a\ P}$$

Krok 2. Rysujemy diagram Venna, nanosząc jedynie przesłanki:



Krok 3. Analiza poprawności wniosku.

Na podstawie diagramu Venna oceniamy, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Aby wniosek $S\ a\ P$ (Każde S jest P) był prawdziwy, obszar reprezentujący S powinien być wykreślony znakami (-), co ma miejsce. Z przesłanek wynika, że S jest w całości zawarte w M, a M jest zawarte w P (każdy element M należy do P), więc S oraz P muszą mieć wspólne elementy. Oznacza to, że wszystkie elementy S są również elementami P. **Wniosek $\boldsymbol{S\ a\ P}$ jest prawdziwy.**

b)

Wszystkie tygrysy są drapieżne.
Niektóre tygrysy nie lubią wody.

Niektóre stworzenia, które lubią wodę, nie są drapieżne.

Rozwiązanie: Postępujemy w ten sam sposób jak w poprzednim ćwiczeniu.

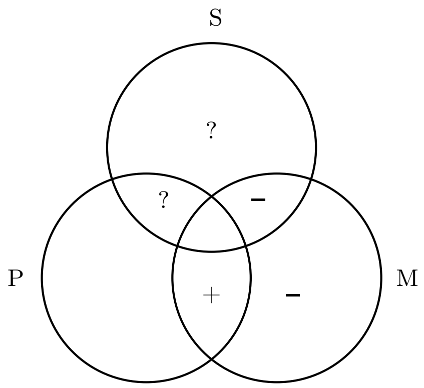
Krok 1. Przekształcenie zdań z języka naturalnego na schematy wnioskowań.

- „tygrysy” $= M$ (termin średni)
- „drapieżne” $= P$
- „lubiące wodę” $= S$

Pierwsza przesłanka: Wszystkie tygrysy są drapieżne $\Rightarrow$ $M\,a\,P$
Druga przesłanka: Niektóre tygrysy nie lubią wody $\Rightarrow$ $M\,o\,S$
Wniosek: Niektóre stworzenia, które lubią wodę, nie są drapieżne $\Rightarrow$ $S\,o\,P$

$$\begin{array}{c} M\ a\ P \\ M\ o\ S \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

Krok 2. Rysujemy diagram Venna, nanosząc jedynie przesłanki:



Znak (+) w części wspólnej P oraz M nie posiada znaku zapytania (+?), ponieważ przesłanka druga wskazuje na to, że "Niektóre M nie są S". Obszar, który nam pozostał to obszar wspólny P i M oraz obszar wspólny dla wszystkich zbiorów. Jeśli ta przesłanka ma być prawdziwa, to znak (+) musi znajdować się tylko w obszarze wspólnym dla P oraz M.

Krok 3. Analiza poprawności wniosku.

Na podstawie diagramu Venna oceniamy, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Aby wniosek $S\ o\ P$ (Niektóre S nie są P) był prawdziwy, w obszarze reprezentującym S powinien znaleźć się znak (+), natomiast na podstawie przesłanek nie możemy stwierdzić, że taki znak faktycznie występuje. Z przesłanek wynika jedynie, że M jest w całości zawarte w P oraz że występują elementy M, które nie są S. Oznacza to, że nie mamy żadnej pewności co do wniosku, że "Niektóre elementy S nie są elementami P". **Wniosek *S o P* nie jest prawdziwy.**

c)

Część Polaków nie jest z Lublina.
Wszyscy Polacy są waleczni.

Niektórzy waleczni ludzie nie są z Lublina.

Rozwiązanie:

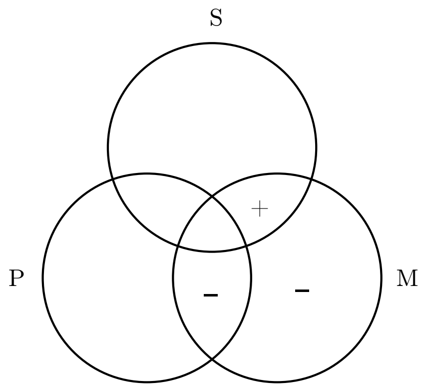
Krok 1. Przekształcenie zdań z języka naturalnego na schematy wnioskowanń.

- „Polak” = M (termin średni)
- „osoba z Lublina” = P
- „waleczni” = S

Pierwsza przesłanka: Część Polaków nie jest z Lublina $\Rightarrow$ $M\,o\,P$
Druga przesłanka: Wszyscy Polacy są waleczni $\Rightarrow$ $M\,a\,S$
Wniosek: Niektórzy waleczni ludzie nie są z Lublina $\Rightarrow$ $S\,o\,P$

$$\frac{\begin{array}{c} M\ o\ P \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ o\ P}$$

Krok 2. Rysujemy diagram Venna, nanosząc jedynie przesłanki:



Krok 3. Analiza poprawności wniosku.

Na podstawie diagramu Venna oceniamy, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Aby wniosek $S\ o\ P$ (Niektóre S nie są P) był prawdziwy, w obszarze reprezentującym S poza obszarem P powinien znaleźć się znak (+), co ma miejsce. Z przesłanek wynika, że M jest w całości zawarte w S oraz że występują elementy M, które nie są P. Oznacza to, że poza obszarem P musi znajdować się element, który należy do obszaru S. **Wniosek $S\ o\ P$ musi być zatem prawdziwy.**

d)

Miód jest słodki.
Ocet nie jest słodki.

Ocet nie jest miodem.

e)

Żadna ryba nie jest muzykalna.
Niektóre żaby są muzykalne.

Niektóre żaby nie są rybami.

f)

Żaden dłużnik nie jest zamożny.
Niektórzy prawnicy nie są dłużnikami.

Niektórzy prawnicy są zamożni.

g)

Pewne butelki są szklane.
Wszystkie rzeczy ze szkła są na półce.

Niektóre rzeczy na półce to butelki.

h)

Każdy niewykształcony człowiek jest powierzchowny.
Studenci są wszyscy wykształceni.

Żaden student nie jest powierzchowny.

i)

Każdy sokół może szybować.
Niektóre krowy nie mogą szybować.

Niektóre krowy nie są sokołami.

j)

Wszelkie osy są nieprzyjazne.
Żadne lalki nie są nieprzyjazne.

Lalki nie są osami.

k)

Żadni mechanicy nie są maratończykami.
Jesteś maratończykiem.

Nie jesteś mechanikiem.

l)

Wszystkie młode kotki bawią się.
Żadne młode zwierzę nie jest szczęśliwe, o ile się nie bawi.

Wszelkie młode kotki są szczęśliwe.

m)

Przekupni ludzie nie są prawnikami.
Niektórzy spawacze są przekupnymi ludźmi.

Pewni spawacze nie są prawnikami.

n)

Żadna świnka morska nie jest większa od psa.
Każda świnka morska jest gryzoniem.

Pewne gryzonie nie są większe od psa.

o)

Żaden rower nie jest samochodem.
Wszystkie samochody mają silniki.

Niektóre pojazdy z silnikami nie są rowerami.

Sorites (stos, łańcusznik) to rozumowanie oparte na zdaniach kategorycznych mające więcej niż dwie przesłanki.

4. Znajdź wniosek dla następujących soritesów.

a)

(1) Koty są nierozsądne.
(2) Nikt nie pogardza kimś, kto złapał węża.
(3) Nierozsądnymi stworzeniami się pogardza.

Rozwiązanie:

Krok 1. Aby móc rozwiązać tego typu zadanie, postępujemy w podobny sposób jak w zadaniu 2. Przekształcamy zdania z języka naturalnego na schematy wnioskowań, stosując odpowiednie oznaczenia. Musimy również określić uniwersum (zbiór przedmiotów, do których odnoszą się analizowane zdania). W tym przypadku jest to zbiór żywych stworzeń.

- „kot” $= K$
- „stworzenie nierozsądne” $= N$
- „ktoś kim się pogardza” $= P$
- „pogromca węży” $= W$

Pierwsza przesłanka: Koty są nierozsądne $\Rightarrow$ $K\,a\,N$
Druga przesłanka: Nikt nie pogardza kimś, kto złapał węża $\Rightarrow$ $W\,e\,P$
Trzecia przesłanka: Nierozsądnymi stworzeniami się pogardza $\Rightarrow$ $N\,a\,P$

$$\begin{array}{c} K\ a\ N \\ W\ e\ P \\ N\ a\ P \\ \hline ? \end{array}$$

Krok 2. W drugim zadaniu, aby dojść do wniosku, posłużyliśmy się diagramem Venna. Tym razem jednak zastosowanie tej metody byłoby problematyczne, ponieważ konieczne byłoby uwzględnienie aż 16 różnych obszarów. Cztery kategorie oznaczają 16 możliwych zbiorów (dla trzech było ich 8), a dodanie czwartego koła wymagałoby rysowania go w innej płaszczyźnie, co utrudniałoby analizę.

Aby uniknąć tych komplikacji, w soritesach najwygodniej jest korzystać z metody stopniowego wyciągania wniosków cząstkowych. Jest to niezawodne podejście oparte na schemacie rachunku zdań, które pozwala logicznie dochodzić do końcowego wniosku bez konieczności używania skomplikowanych diagramów:

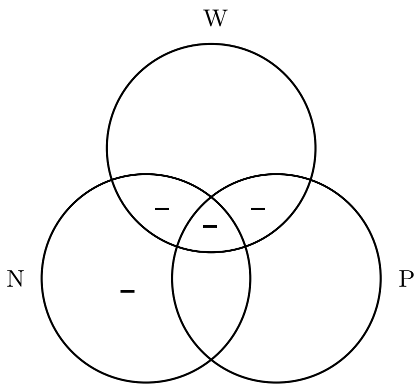
$$\frac{\begin{array}{c}(p \wedge q) \rightarrow t \\ (t \wedge r) \rightarrow s\end{array}}{(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s}$$

Z drugiej i trzeciej przesłanki możemy utworzyć wnioskowanie cząstkowe:

$$\frac{\begin{array}{c}W\ e\ P \\ N\ a\ P\end{array}}{?}$$

Stosując metodę diagramów Venna znajdziemy wniosek: $N\,e\,W$. Teraz wystarczy zastąpić nasze dwie przesłanki przez otrzymaną konkluzję i otrzymujemy prostszy schemat wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}K\ a\ N \\ N\ e\ W\end{array}}{?}$$



Krok 3. Teraz na podstawie diagramu Venna, możemy wydobyć wniosek - $W\,e\,K$, czyli **"Żaden pogromca węży nie jest kotem" albo "Żaden kot nie jest pogromcą węży"**

Czasami w soritesach może wydawać się, że liczba terminów jest zbyt duża. W takich przypadkach można ją zredukować, korzystając z poniższych praw obwersji (gdzie „$-P$" oznacza „nie P", np. „nie-ptak" to wszystko w uniwersum, co nie jest ptakiem). Można to łatwo zweryfikować za pomocą diagramów Venna:

$$S\ a\ P \equiv S\ e - P$$

$$S\ e\ P \equiv S\ a - P$$

$$S\ i\ P \equiv S\ o - P$$

$$S\ o\ P \equiv S\ i - P$$

Dzięki temu możemy uprościć rozumowanie i ograniczyć liczbę rozważanych terminów. W sytuacji, gdy przykładowe zdania zawierają słowa takie jak „kobieta" czy „wysoki", pomocne może być zawężenie uniwersum do „moich przyjaciół". Wówczas pojęcie „mężczyzna" można uznać za „nie-kobietę", a „wysoki" za „nie-niski", co upraszcza analizę i ułatwia wyciąganie logicznych wniosków.

b)

(1) Wszystkie stare samochody są powolne.
(2) Wszystkie Mercedesy są szybkie.
(3) Żaden samochód, który stoi na parkingu, nie jest nowy.

Rozwiązanie:

Krok 1. Przekształcamy zdania z języka naturalnego na schematy wnioskowań, stosując odpowiednie oznaczenia. Uniwersum to zbiór samochodów.

- „stare samochody” $= S$
- „powolne samochody” $= W$
- „Mercedes” $= M$
- „samochód na parkingu” $= P$

Pierwsza przesłanka: Wszystkie stare samochody są powolne $\Rightarrow$ $S\,a\,W$

Druga przesłanka: Wszystkie Mercedesy są szybkie - z prawa obwersji ($S\ a\ -P \equiv S\ e\ P$) możemy zapisać to zdanie jako "Żaden Mercedes nie jest powolny" $\Rightarrow$ $M\,e\,W$

Trzecia przesłanka: Żaden samochód, który stoi na parkingu, nie jest nowy - z praw obwersji ($S\ e\ P \equiv S\ a\ -P$) możemy zapisać zdanie jako "Każdy samochód, który stoi na parkingu jest stary" $\Rightarrow$ $P\,a\,S$

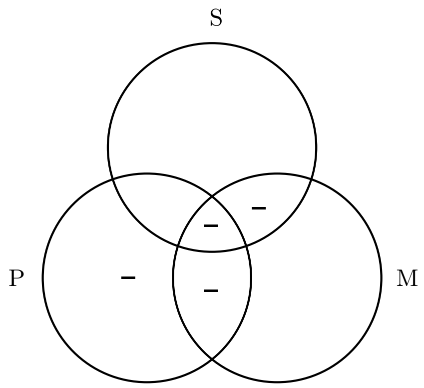
$$\begin{array}{c} S\ a\ W \\ M\ e\ W \\ P\ a\ S \\ \hline ? \end{array}$$

Z pierwszej i drugiej przesłanki możemy utworzyć wnioskowanie cząstkowe:

$$\begin{array}{c} S\ a\ W \\ M\ e\ W \\ \hline ? \end{array}$$

Stosując metodę diagramów Venna znajdziemy wniosek: $M\,e\,S$. Teraz wystarczy naszą konkluzją zastąpić dwie przesłanki i otrzymujemy prostszy schemat wnioskowania:

$$\begin{array}{c} M\ e\ S \\ P\ a\ S \\ \hline ? \end{array}$$



Krok 3. Teraz na podstawie diagramu Venna, możemy wydobyć wniosek - $P\,e\,M$, czyli **"Żaden samochód na parkingu nie jest Mercedesem" albo "Żaden Mercedes nie jest samochodem na parkingu".**

c)

(1) Żaden ptak oprócz strusia nie mierzy więcej niż 2.5 metra .
(2) W tej klatce nie ma żadnych ptaków, które nie są moje.
(3) Żaden struś nie je suszonego banana.
(4) Nie posiadam w swojej klatce ptaków mierzących mniej niż 2.5 metra.

d)

(1) Jedyne książki w tej bibliotece, których nie polecam do czytania, są niestosowne.
(2) Wszystkie oprawione książki są dobrze napisane.
(3) Wszystkie romanse są stosowne.
(4) Nie polecam czytania żadnych książek, które są nieoprawione.

e)

(1) Żadne interesujące wiersze nie są niepopularne wśród ludzi o dobrym guście.
(2) Żadna współczesna poezja nie jest wolna od sztuczności.
(3) Wszystkie twoje wiersze są bezsensowne.
(4) Żadna sztuczna poezja nie cieszy się popularnością wśród ludzi o dobrym guście.
(5) Żaden starożytny poemat nie jest bezsensowny.

f)

(1) Wszyscy pisarze, którzy rozumieją naturę ludzką, są mądrzy .
(2) Nikt nie jest prawdziwym poetą, jeśli nie potrafi poruszyć serc ludzi.
(3) Szekspir napisał "Hamleta".
(4) Tylko ten, kto rozumie naturę ludzką, może poruszyć serca ludzi.
(5) Tylko prawdziwy poeta mógłby napisać "Hamleta".

g)

(1) Wszyscy studenci KUL grają w siatkówkę .
(2) Przy wyższym stole jadają tylko uczeni.
(3) Żaden z siatkarzy nie jest wioślarzem.
(4) Wszyscy moim przyjaciele to studenci KUL.
(5) Wszyscy uczeni są wioślarzami.

h)

(1) Żaden kot, który lubi rybki, nie jest czarny.
(2) Żaden kot bez ogona nie będzie bawił się z gorylem.
(3) Koty z wąsami lubią ryby.
(4) Żaden kot, który jest czarny, nie ma zielonych oczu.
(5) Żaden kot nie ma ogona, chyba że ma wąsy.

i)

(1) Zwierzęta, które nie wierzgają, są zawsze niepobudliwe.
(2) Osły nie mają rogów.
(3) Byk może zawsze wziąć kogoś na rogi.
(4) Żadne zwierzę, które nie wierzga, nie jest łatwe do okiełznania.
(5) Żadne bezrogie zwierzę nie jest łatwe do okiełznania.
(6) Wszystkie zwierzęta są pobudliwe oprócz byków.

j)

(1) Mogę zaufać każdemu zwierzęciu, które należy do mnie.
(2) Psy gryzą kości.
(3) Nie wpuszczam do swojego pokoju żadnych zwierząt, chyba że wydam im komendę "poproś".
(4) Wszystkie zwierzęta na podwórku są moje.
(5) Do mojego pokoju wpuszczam każde zwierzę, któremu mogę zaufać.
(6) Jedynymi zwierzętami, które wykonują komendę "poproś" gdy się im każe to psy.

k)

(1) Żaden rekin nie ma wątpliwości, że jest dobrze uzbrojony .
(2) Ryba, która nie potrafi zatańczyć tango jest godna pogardy.
(3) Żadna ryba nie jest pewna, że jest dobrze uzbrojona, dopóki nie ma trzech rzędów zębów.
(4) Wszystkie ryby, z wyjątkiem rekinów są przyjazne dla dzieci.
(5) Żadna ciężka ryba nie zatańczy tango.
(6) Ryba, która ma trzy rzędy zębów nie jest godna pogardy.

l)

(1) Nie nazywam żadnego dnia „nieszczęśliwym", kiedy Jan jest wobec mnie uprzejmy.
(2) Środy są zawsze pochmurne.
(3) Kiedy ludzie biorą parasole, dzień rzadko kiedy kończy się dobrze.
(4) Jedyne dni, kiedy Jan jest wobec mnie nieuprzejmy to środy.
(5) Nikt nie zostawia parasola w domu, kiedy pada deszcz.
(6) Moje "szczęśliwe" dni zazwyczaj kończą się dobrze.

m)

(1) Wszyscy policjanci na tym posterunku spożywają kolację z naszym kucharzem.
(2) Żaden mężczyzna z długimi włosami nie może być nie-poetą.
(3) Jan Wiśniewski nigdy nie był w więzieniu.
(4) Kuzyni naszego kucharza kochają zimną baraninę.
(5) Nikt poza policjantami na tym posterunku nie jest poetą.
(6) Nikt poza kuzynami nigdy nie spożywał kolacji z naszym kucharzem.
(7) Wszyscy mężczyźni z krótkimi włosami byli w więzieniu.

n)

(1) Wszystkie datowane listy w tym pokoju są napisane na niebieskim papierze.
(2) Żaden z nich nie jest napisany czarnym atramentem, z wyjątkiem tych, które są napisane w trzeciej osobie.
(3) Nie zniszczyłem żadnego z tych, które mogłem przeczytać.
(4) Żaden z listów napisanych na jednej kartce nie jest niedatowany.
(5) Wszystkie, które nie są skreślone są napisane czarnym atramentem.
(6) Wszystkie listy Kowalskiego, zaczynają się od słów "Szanowny Panie".
(7) Wszystkie listy napisane na niebieskim papierze zostały zniszczone.
(8) Żaden list napisany na więcej niż jednej kartce nie jest skreślony.
(9) Żaden z listów zaczynający się od słów "Szanowny Panie" nie jest napisany w trzeciej osobie.

o)

(1) Jedynymi zwierzętami w tym domu są koty.
(2) Każde zwierzę, które lubi gapić się na księżyc, nadaje się na zwierzę domowe.
(3) Kiedy nie znoszę jakiegoś zwierzęcia, unikam go.
(4) Żadne zwierzę nie jest drapieżnikiem, o ile nie łazi po nocy.
(5) Każdy kot poluje na myszy.
(6) Żadne zwierzę mi nie odpowiada poza tymi w tym domu.
(7) Kangury nie nadają się na zwierzęta domowe.
(8) Żadne zwierzę poza drapieżnikami nie poluje na myszy.
(9) Nie znoszę zwierząt, które mi nie odpowiadają.
(10) Zwierzęta, które łażą po nocy lubią gapić się na księżyc.

5. Znajdź wniosek dla następujących schematów wnioskowań.

a)

Żadne B nie jest A;
Żadne C nie jest –D;
Każde D jest B

Rozwiązanie:

Krok 1. W tym zadaniu na samym początku należy zapisać wszystkie przesłanki w formie sylogizmów:

$$\begin{array}{c} B \ e \ A \\ C \ e \ –D \\ D \ a \ B \\ \hline ? \end{array}$$

Krok 2. Korzystamy z metody stopniowego wyciągania wniosków cząstkowych (szukamy w przesłankach niezawodnych trybów sylogistycznych i wyciągamy wnioski).

Z przesłanki pierwszej oraz trzeciej uzyskujemy:

$$\begin{array}{c} B \ e \ A \\ D \ a \ B \\ \hline D \ e \ A \end{array}$$

W tym momencie wystarczy utworzyć nowe wnioskowanie, tym razem z $D\,e\,A$ (wnioskiem cząstkowym) oraz $C\,e\,-\,D$ (pozostałą przesłanką). Należy zauważyć, że w tej ostatniej musimy skorzystać z praw obwersji, tak aby można było przeprowadzić poprawne wnioskowanie.

Z prawa $S\ e - P \equiv S\ a\ P$, przesłankę możemy przekształcić na $C\,a\,D$. Teraz sytuacja jest jasna, naszymi nowymi przesłankami będą $D\,e\,A$ i $C\,a\,D$. Rozwiązanie możemy znaleźć przy pomocy diagramu Venna lub skorzystać z niezawodnych trybów sylogistycznych, by przekonać się że **jest to tryb Cesare**. Tym sposobem udało nam się znaleźć wniosek do łańcusznika z trzema przesłankami.

$$\begin{array}{c} D \ e \ A \\ C \ a \ D \\ \hline \boldsymbol{C \ e \ A} \end{array}$$

b)

Żadne –A nie jest E;
Każde D jest –C;
Każde A jest B;
Każde –E jest D

Rozwiązanie:

Krok 1. Zapisujemy wszystkie przesłanki w formie sylogizmów:

$$\begin{array}{c} –A \ e \ E \\ D \ a \ –C \\ A \ a \ B \\ –E \ a \ D \\ \hline ? \end{array}$$

Po krótkiej analizie, możemy znaleźć dwie przesłanki, z których możemy od razu wyciągnąć wniosek. Jest to przesłanka druga oraz czwarta: $D\,a - C$, $-E\,a\,D$. Wnioskiem częściowym jest $-E\,a\ -C$.

$$\begin{array}{c} -A\ e\ E \\ -E\ a\ -C \\ A\ a\ B \\ \hline ? \end{array}$$

Na ten moment nie jesteśmy w stanie wyciągnąć żadnego wniosku. Aby tego dokonać, musimy zastosować prawa obwersji oraz konwersji prostej. Najłatwiej będzie przekształcić przesłankę drugą:

$$-E\ a\ -C \equiv -E\ e\ C \equiv C\ e\ -E \equiv C\ a\ E$$

Mając przesłankę $C\,a\,E$, możemy posłużyć się: $-A\,e\,E$, aby dojść do wniosku $C\,e\,-A$. Z prawa obwersji: $C\ e\ -A \equiv C\ a\ A$.

$$\begin{array}{c} C\ a\ A \\ A\ a\ B \\ \hline \boldsymbol{C\ a\ B} \end{array}$$

c)

Żadne B nie jest C;
Każde E jest H;
Każde A jest B;
Żadne D nie jest H;
Każde –E jest C

Rozwiązanie:

Krok 1. Zapisujemy wszystkie przesłanki w formie sylogizmów:

$$\begin{array}{c} B\ e\ C \\ E\ a\ H \\ A\ a\ B \\ D\ e\ H \\ -E\ a\ C \\ \hline ? \end{array}$$

Krok 2. W tym przykładzie mamy aż 5 przesłanek, postarajmy się więc krok po kroku przeanalizować, jakie wnioski możemy wyciągnąć.

- Z przesłanki pierwszej oraz trzeciej możemy zapisać $A\,e\,C$;
- Teraz przekształcając przesłankę piątą mamy $-E\ e\ A \equiv A\ e\ -E \equiv A\ a\ E$
- Łącząc przesłanką drugą ($E\ a\ H$) z wnioskiem otrzymanym wyżej ($A\ a\ E$), otrzymujemy $A\ a\ H$
- Pozostała nam tylko przesłanka $D\ e\ H$ oraz $A\ a\ H$, które razem dają tryb sylogistyczny Cesare, czyli wniosek to $\boldsymbol{A\ e\ D}$.

d)
Każde D jest C;
Każde A jest E;
Żadne B nie jest –D;
Każde C jest –E;

e)
Każde A jest B;
Każde D jest E;
Każde –A jest –C;
Żadne B nie jest E;

f)
Każde B jest A;
Żadne D nie jest H;
Żadne C nie jest E;
Żadne A nie jest –H;
Każde –C jest B;

g)
Żadne B nie jest C;
Każde E jest H;
Każde A jest B;
Żadne D nie jest H;
Każde –E jest C;

h)
Żadne D nie jest –H;
Żadne C nie jest E;
Każde H jest B;
Żadne A nie jest –D;
Żadne B nie jest –E;

i)
Każde –B jest –A;
Żadne D nie jest –E;
Każde H jest –B;
Żadne C nie jest E;
Każde –D jest A;

j)
Każde E jest –D;
Żadne –B nie jest –H;
Każde –C jest D;
Każde A jest E;
Żadne C nie jest H;

k)
Każde –H jest –K;
Żadne –B nie jest A;
Każde C jest D;
Każde E jest –H;
Żadne D nie jest –K;
Żadne B nie jest –C;

l)
Każde –A jest H;
Żadne –D nie jest –K;
Każde E jest –B;
Żadne H nie jest K;
Każde A jest C;
Żadne –B nie jest D;

m)
Żadne –A nie jest K;
Każde E jest B;
Żadne H nie jest –K;
Żadne –D nie jest C;
Żadne A nie jest B;
Każde –C jest H;

n)
Żadne E nie jest K;
Żadne –B nie jest M;
Żadne A nie jest –C;
Każde –H jest E;
Każde D jest K;
Żadne C nie jest B;
Każde –D jest L;
Żadne H nie jest –M;

o)
Każde N jest M;
Każde –A jest E;
Żadne –C nie jest L;
Każde K jest –R;
Żadne A nie jest –H;
Żadne D nie jest –L;
Żadne C nie jest –N;
Każde E jest B;
Każde M jest R;
Każde H jest D;

4. Rachunek zbiorów i relacji

4.1 Wprowadzenie

Rachunek zbiorów i relacji stanowi jeden z fundamentów współczesnej matematyki, będąc nieodłącznym elementem wielu dziedzin, takich jak teoria mnogości, logika matematyczna, algebra, teoria grafów czy informatyka teoretyczna. Dzięki swojej prostocie oraz uniwersalności, rachunek zbiorów i relacji jest wykorzystywany do formalizacji wielu pojęć i zależności w matematyce oraz w naukach komputerowych.

Rozwój rachunku zbiorów datuje się na przełom XIX i XX wieku, kiedy to niemiecki matematyk Georg Cantor sformułował podstawy teorii mnogości, badając zbiory jako obiekty matematyczne. Cantor wprowadził pojęcie zbiorów nieskończonych oraz ustalił zasady dotyczące operacji na zbiorach, które stały się fundamentem współczesnej matematyki.

Rachunek zbiorów i relacji znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach matematyki oraz nauk komputerowych. Jego kluczowe obszary wykorzystania obejmują:

- **Teoria mnogości**: Rachunek zbiorów stanowi podstawę teorii mnogości, umożliwiając formalne definiowanie i manipulowanie zbiorami oraz operacjami na nich, takimi jak suma, iloczyn, różnica czy dopełnienie.
- **Teoria grafów**: Relacje są podstawą teorii grafów, gdzie wierzchołki grafu są połączone relacjami (krawędziami), a rachunek relacji pozwala na analizowanie struktur grafowych.
- **Algebra**: Relacje pojawiają się w algebrze, np. w analizie grup, pierścieni i innych struktur algebraicznych, gdzie operacje na zbiorach i relacjach umożliwiają definiowanie równości, izomorfizmów oraz porządków.
- **Teoria baz danych**: W modelowaniu baz danych relacje odgrywają kluczową rolę w reprezentacji zależności między danymi, umożliwiając projektowanie i optymalizację zapytań w bazach danych.
- **Informatyka teoretyczna**: Rachunek relacji jest szeroko wykorzystywany w analizie algorytmów, struktur danych oraz w teorii automatów, gdzie operacje na zbiorach i relacjach pozwalają na modelowanie procesów obliczeniowych i języków formalnych.

Rachunek zbiorów i relacji jest także podstawą bardziej zaawansowanych teorii, takich jak teoria kategorii, logika matematyczna oraz inne gałęzie matematyki, które opierają się na analizie struktur i zależności między elementami.

4.2 Pojęcie identyczności

W tym miejscu chcemy krótko omówić kilka spośród najważniejszych pojęć teorii zbiorów oraz tej jej części, którą stanowi teoria relacji. Ponieważ pojęcia te są znane z programu matematyki w szkole średniej, poniższe uwagi będą bardzo krótkie. Należy jeszcze dodać, że w poniżej prezentowanej teorii zbiorów posługiwać się będziemy znakiem równości, zakładając, że spełnione są następujące trzy warunki dotyczące relacji równości (identyczności):

$$x = x$$

tzn. że każdy przedmiot jest identyczny z samym sobą.

$$x = y \to y = x$$

czyli jeśli x jest identyczny z y, to i y jest identyczny z x.

$$(x = y \wedge y = z) \to x = z$$

czyli jeśli x jest identyczny z y, a y jest identyczny z z, to x jest identyczny z z. Przykładowym zdaniem dla tej zależności może być "Lumi jest identyczna z Oskarem, i Oskar jest identyczny z kotem, więc Lumi jest identyczna z kotem".

Czym dokładnie są te "mityczne" zbiory?

Zbiory w sensie dystrybutywnym mogą być formowane przez proste wyliczenie jakichś przedmiotów lub przez podanie własności posiadanej przez wszystkie przedmioty danego zbioru. Ten drugi sposób można zapisać w postaci wzoru:

$$x \in \{y : W(y)\} \equiv W(x)$$

co można odczytać w sposób następujący: x należy do zbioru tych i tylko tych przedmiotów, które posiadają własność W wtedy i tylko wtedy, gdy x posiada własność W. Formułę tę czasem nazywa się aksjomatem definicyjnym. Obok tego warunku podstawowy dla rozumienia pojęcia zbioru jest warunek równości dwóch zbiorów, który może być zapisany w następujący sposób:

$$A = B \equiv (\forall x)[x \in A \equiv x \in B]$$

Warunek ten stwierdza, że dwa zbiory są równe (identyczne) wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy. Identyczne są więc np. takie dwa zbiory: A = { 1, 21, 35 } oraz B = { 21, 35, 1 }; kolejność ustawienia elementów w zbiorze nie odgrywa tu roli.

Jeśli rozpatrujemy zbiory o skończonej liczbie elementów, dwa z nich mają szczególny charakter — zbiór uniwersalny i zbiór pusty. Zbiór uniwersalny to zbiór wszystkich przedmiotów. Na gruncie logiki formalnej podaje się następującą definicję zbioru uniwersalnego:

$$x \in V \equiv x = x$$

czyli x należy do zbioru uniwersalnego wtedy, gdy $x = x$. Zauważmy, że warunek po prawej stronie równoważności jest spełniony przez każdy przedmiot, a to oznacza, że każdy przedmiot należy do zbioru uniwersalnego. Oczywiście w praktyce ograniczamy dziedzinę rozważań do jakiegoś podzbioru zbioru uniwersalnego. Taki podzbiór nazywamy uniwersum lub dziedziną przedmiotową dyskursu. W podobny sposób definiuje się zbiór pusty (zbiór nie posiadający żadnych elementów) — podaje się mianowicie warunek, którego nie spełnia żaden przedmiot. Otrzymujemy definicję:

$$x \in \emptyset \equiv \neg(x = x)$$

Fakt dopuszczania zbiorów pustych w teorii zbiorów (i w teorii mnogości, która jest teorią zbiorów nieskończonych) wskazuje na różnicę między dystrybutywnym a kolektywnym znaczeniem słowa „zbiór". Zbiory w sensie kolektywnym nie mogą być puste (bo są to całości w sensie fizycznym, czyli istności czaso-przestrzenne), nie mamy natomiast problemu z wyobrażeniem sobie dystrybutywnie rozumianego, pustego zbioru Polaków noblistów w dziedzinie ekonomii (do niego należałyby osoby narodowości polskiej, które otrzymały nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Takich osób aktualnie nie ma, ale opisaną własność bez popadnięcia w sprzeczność można rozważać).

Podstawowymi działaniami na zbiorach są: dodawanie, odejmowanie i mnożenie zbiorów oraz dopełnianie zbioru do uniwersum, a rezultatami tych działań są (odpowiednio) suma zbiorów, różnica zbiorów, iloczyn zbiorów i dopełnienie zbioru.

4.3 Podstawowe działania na zbiorach

Suma zbiorów A i B (oznaczana za pomocą symbolu $A \cup B$) jest to zbiór złożony z tych i tylko tych przedmiotów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B, czyli:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

a zatem

$$x \in A \cup B \equiv (x \in A \vee x \in B)$$

Iloczyn zbiorów A i B (oznaczany jako $A \cap B$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B, czyli:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

a zatem

$$x \in A \cap B \equiv (x \in A \wedge x \in B)$$

Różnica zbiorów A i B (oznaczana jako $A - B$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów zbioru A, które nie są elementami zbioru B, czyli

$$A - B = \{x : x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$$

a zatem

$$x \in A - B \equiv x \in A \wedge \neg(x \in B)$$

Dopełnienie zbioru A (oznaczane jako $-A$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które nie są elementami zbioru A, czyli:

$$x \in -A \equiv \neg(x \in A)$$

Przykłady: sumą zbiorów prokuratorów i profesorów jest zbiór tych osób, które są prokuratorami lub są profesorami, iloczyn tych zbiorów jest zbiorem osób będących zarazem prokuratorami i profesorami, a różnicę stanowi zbiór prokuratorów nie będących profesorami. Z kolei podanie dopełnienia jakiegoś zbioru wymaga określenia uniwersum, w którym dany (dopełniany) zbiór się zawiera. Np. dopełnienie zbioru prokuratorów (w uniwersum ludzi) jest zbiorem wszystkich ludzi nie będących prokuratorami, ale dopełnienie tego samego zbioru prokuratorów w uniwersum wszystkich przedmiotów będzie obejmować jakiekolwiek przedmioty, które nie są prokuratorami (np. stoły, foki, ludzi nie będących prokuratorami, itp).

Zbiór wszystkich wyrażeń danego języka jest sumą zbiorów wyrażeń nazwowych, zdaniowych, funktorów i operatorów tego języka, zbiór wyrażeń nazwowych tego języka to różnica zbioru wyrażeń samodzielnych i zbioru wyrażeń zdaniowych (tego języka), a zbiór nie-funktorów to dopełnienie zbioru funktorów w uniwersum wszystkich wyrażeń tego języka.

Zawieranie się zbiorów, czyli inkluzja zbiorów

Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, tzn.

$$A \subset B \equiv (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

lub też

$$A \subset B \equiv A - B = \emptyset$$

Tak np. zbiór prawników zawiera się w zbiorze ludzi, a zbiór nazw danego języka zawiera się w zbiorze wyrażeń nazwowych tego języka. Zauważmy, że zgodnie z podaną definicją każdy zbiór zawiera się w samym sobie, tzn. prawdą jest, że $A \subset A$ oraz zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, tzn. $\emptyset \subset A$. Dysponując pojęciem zawierania się zbiorów, można podać definicję równości zbiorów, a mianowicie:

$$A = B \equiv A \subset B \wedge B \subset A$$

tzn. dwa zbiory są identyczne, gdy wzajemnie się zawierają.

Pojęcie relacji i niektóre własności relacji

Każdy człowiek po kursie matematyki wie, co to jest funkcja. Jednak nie każdy kojarzy pojęcie funkcji z pojęciem o szerszym zakresie, czyli pojęciem relacji. Jest to drugie, obok „zbioru", ważne pojęcie logiki dotąd jeszcze przez nas nie omawiane. Intuicyjnie rzecz ujmując relacja jest to stosunek zachodzący między przedmiotami.

Powiemy, że Jan pozostaje w relacji bycia ojcem względem Hipolita, podobnie Karol jest ojcem Zenobii, a Gerwazy ojcem Protazego. Ogólnie można powiedzieć, że relacja bycia ojcem jest to wspólna własność par osób (Jana i Hipolita, Karola i Zenobii, Gerwazego i Protazego, i tak dalej). Analizując relację bycia ojcem zauważamy ponadto, że kolejność między przedmiotami pozostającymi w danym stosunku jest rzeczą ważną; jeśli np. Jan jest ojcem Hipolita, to oczywiście nie jest prawdą, że Hipolit jest ojcem Jana. Ta cecha różni pary członów relacji od „zwykłych" zbiorów dwuelementowych, w przypadku których kolejność elementów nie odgrywa roli, tzn. prawdą jest, że $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Te dwa spostrzeżenia rzucają światło na logiczne określenie relacji (tu dla uproszczenia ograniczymy się jedynie do określenia relacji dwuczłonowych). Aby spełnić wymóg, iż kolejność elementów w parze jest jej cechą istotną, wprowadza się pojęcie pary uporządkowanej (symbolizowane przez zapis $< x, y >$ odczytywany: „para uporządkowana o pierwszym elemencie x i drugim y"), która jest zbiorem dwuelementowym, spełniającym następujący warunek równości par uporządkowanych:

$$\langle x, y\rangle = \langle z, u\rangle \equiv [x = z \wedge y = u]$$

co czytamy: dwie pary uporządkowane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich pierwsze elementy są równe oraz ich drugie elementy są równe. Dysponując pojęciem pary uporządkowanej można zdefiniować relację dwuczłonową.

Relacja dwuczłonowa jest to zbiór par uporządkowanych; innymi słowy x pozostaje w relacji R względem y wtedy i tylko wtedy, gdy para uporządkowana $\langle x, y\rangle$ jest elementem relacji R, tj. pewnego zbioru par uporządkowanych. Wyrażenie „para uporządkowana $\langle x, y\rangle$ jest elementem relacji R", czyli symbolicznie $\langle x, y\rangle \in R$, zapisujemy skrótowo xRy.

Relacje zachodzą między przedmiotami. Ważne jest odróżnienie zbiorów przedmiotów, które są pierwszymi członami relacji, od tych, które są drugimi jej członami. Pierwszy zbiór nazywamy dziedziną relacji, a drugi jej przeciwdziedziną.

Dziedzina relacji R jest to zbiór wszystkich przedmiotów, które względem jakiegoś przedmiotu pozostają w relacji R. Innymi słowy, x należy do dziedziny relacji R, gdy istnieje taki przedmiot, względem którego x pozostaje w relacji R, co symbolicznie można zapisać:

$$x \in D(R) \equiv (\exists y)\, xRy.$$

Podobnie:

Przeciwdziedzina relacji R jest to zbiór przedmiotów, względem których jakiś przedmiot pozostaje w relacji R.

$$y \in \text{ᗡ}(R) \equiv (\exists x)\, xRy.$$

Tak na przykład dziedziną relacji bycia ojcem jest zbiór wszystkich osób, które są ojcami, a przeciwdziedzina tej relacji to zbiór wszystkich osób mających ojca; dziedziną relacji bycia mężem jest zbiór wszystkich mężów, a jej przeciwdziedziną zbiór osób mających męża, czyli zbiór wszystkich żon. Dysponując pojęciem relacji, można określić pojęcie funkcji.

Funkcja jest to relacja, która każdemu elementowi dziedziny przyporządkowuje jeden i tylko jeden element przeciwdziedziny.

$$Funkcja(R) \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy \wedge xRz) \rightarrow y = z]$$

Zatem R jest funkcją wtedy, gdy nie może zachodzić przypadek, że jednemu elementowi dziedziny odpowiadają dwa elementy przeciwdziedziny. Przykłady funkcji: relacja zachodząca między wartościami logicznymi argumentów funktora prawdziwościowego a wartością logiczną wyrażenia utworzonego za pomocą tego funktora; relacja między osobami a datami ich urodzenia; relacja między osobami a ich matkami; działanie dodawania jako funkcja zachodząca między składnikami dodawania a ich sumą (relacja trójargumentowa), i tym podobne.

Przyglądając się podanym tu przykładom relacji, możemy stwierdzić, iż relacje mogą mieć różne własności. Na przykład jedne z nich zachodzą „w jedną i w drugą stronę” (np. relacja bycia rodzeństwem), podczas gdy inne zachodzą tylko „w jedną stronę” (np. relacja bycia większym); są takie relacje, które zawsze zachodzą pomiędzy dowolną parą przedmiotów (bycie większym lub równym) oraz takie, które raz zachodzą, a innym razem nie zachodzą (bycie bratem). Podamy teraz kilka definicji podstawowych własności relacji.

Relacja R w zbiorze A jest zwrotna:

$$refl(R, A) \equiv (\forall x)[x \in A \to xRx]$$

Relacja R jest zwrotna w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między jakimś przedmiotem należącym do tego zbioru, a nim samym. Przykłady: relacja bycia tego samego wzrostu w zbiorze osób, relacja bycia większym lub równym w zbiorze liczb, itp. W następnych definicjach dla uproszczenia przyjmiemy, że dziedziną relacji R jest zbiór A. Będziemy wówczas mówić, że relacja R jest zwrotna (w swojej dziedzinie), czyli po prostu, że relacja R jest zwrotna, symetryczna, i tak dalej.

Relacja R jest symetryczna:

$$sym(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[xRy \to yRx]$$

Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary przedmiotów, jeśli ta relacja zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem, to zachodzi także między przedmiotem drugim a pierwszym. Przykłady: relacja bycia rodzeństwem, relacja bycia małżonkiem, itp.

Relacja R jest przechodnia:

$$trans(R) \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy \wedge yRz) \to xRz]$$

Relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej trójki przedmiotów, jeśli relacja ta zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem oraz między drugim a trzecim przedmiotem, to zachodzi także między pierwszym a trzecim przedmiotem tej trójki. Przykłady: relacja bycia potomkiem, relacja bycia większym, itp.

Relacja R jest spójna:

$$con(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[\neg(x = y) \to xRy \vee yRx]$$

Relacja R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta zawsze zachodzi między dowolną parą różnych przedmiotów. Np. relacja bycia większym w zbiorze liczb, relacja bycia jaśniejszym w zbiorze barw, itp.

Relacja R jest asymetryczna:

$$asym(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[xRy \to \neg(yRx)]$$

Relacja R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary przedmiotów, jeśli relacja ta zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem jakiejś pary, to nie zachodzi między przedmiotem drugim a pierwszym tej pary. Np. relacja bycia ojcem, relacja bycia dłużnikiem, itp.

Powyższe definicje umożliwiają określenie dwóch zasadniczych typów relacji: relacji równoważnościowej oraz relacji porządkujących.

Relacja R jest równoważnościowa:

$$aeq(R) \equiv [refl(R) \wedge sym(R) \wedge trans(R)]$$

Relacja jest równoważnościowa, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Przykłady: relacja równoważności w zbiorze wyrażeń, relacja równoległości w zbiorze prostych, relacja przystawania w zbiorze trójkątów itp. Relacje równoważnościowe mają duże znaczenie przy konstruowaniu definicji. Otóż wszystkie przedmioty, między którymi zachodzi relacja równoważnościowa, mają wspólną własność, której nie mają przedmioty w tej relacji nie pozostające. Np. wszystkie odcinki do siebie przystające mają tę samą długość, a wszystkie trójkąty, które są do siebie podobne, mają ten sam kształt.

Można więc powiedzieć, że kształt jakiegoś trójkąta jest to wspólna własność wszystkich trójkątów do niego podobnych, a długość jakiegoś odcinka to wspólna cecha wszystkich odcinków przystających do tego odcinka.

Drugim z ważnych pojęć teorii relacji jest pojęcie relacji porządkującej. Odróżnia się mocniejsze i słabsze pojęcia porządku.

Relacja R **porządkuje zbiór** A wtedy i tylko wtedy, gdy relacja R jest relacją asymetryczną, przechodnią i spójną w zbiorze A.

Takimi relacjami są na przykład: relacje bycia większym lub bycia mniejszym w zbiorze liczb, relacja bycia jaśniejszym w zbiorze barw, i tak dalej.

Relacja R **częściowo porządkuje zbiór** A wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta jest asymetryczna i przechodnia w zbiorze A.

Przykładami relacji częściowo porządkującej są: wszystkie relacje porządkujące, relacja bycia starszym w zbiorze osób (relacja ta jest tylko częściowo porządkująca, bo mogą być osoby mające tyle samo lat, między którymi relacja bycia starszym nie zachodzi). Wskazanie relacji porządkujących jakiś zbiór przedmiotów jest operacją szeregowania przedmiotów.

Relacja posiadania niższego numeru w albumie jest relacją porządkującą zbiór osób studiujących na uniwersytecie, która umożliwia ich uszeregowanie. Relacja „bycia wcześniej kupioną" częściowo porządkuje zbiór książek w bibliotece, a relacja bycia bardziej inteligentnym porządkuje częściowo zbiór studentów.

4.4 Zadania

Zadanie 1

Dane są trzy zbiory:

A – zbiór trójkątów prostokątnych,
B – zbiór trójkątów równobocznych,
C – zbiór trójkątów równoramiennych.

Jakie figury należą do następujących zbiorów:

a) $B \cap C$
Odp: trójkąty równoboczne

b) $B \cup C$
Odp: wszystkie trójkąty, które są równoboczne lub równoramienne

c) $A - B$
Odp: wszystkie trójkąty prostokątne, które nie są równoboczne

d) $C - B$
e) $A \cup C$
f) $B - A$
g) $B \in C$
h) $C \cap A$
i) $C - A$
j) $C \cup A$

Zadanie 2

Dane są zbiory:

$A = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 23, 45\}$,
$B = \{2, 3, 4, 7, 9\}$,
$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$,
D – zbiór liczb parzystych.

Wskaż zbiory:

a) $A - B$
Odp: $A - B = \{1, 5, 6, 8, 11, 23, 45\}$

b) $C - D$

Odp: $C - D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

c) $A \cup C$
Odp: $A \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 23, 45\}$

d) $B \cup C$
e) $B \cup D$
f) $A \cap D$
g) $B \cap C$
h) $A \cap C$

Zadanie 3

Podaj elementy następujących zbiorów:

a) $\{x \in \mathbb{N} : x \neq 2\}$
Odp: {1,3,4,5,6,7,8,9,...}

b) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 7\}$
c) $\{x \in \mathbb{N} : x < -1\}$

Zadanie 4

Załóżmy, że różne litery oznaczają różne przedmioty, ewentualnie liczby rzeczywiste. Zbadaj, jakie relacje zawierania (inkluzji) zachodzą między zbiorami A i B:

a) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;
Odp: $B \subset A$, bo dla każdego x $(x \in B \to x \in A)$, więc jeśli $a, c, d \in B$, to te same elementy należą także do A;

b) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$
c) $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$
d) $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$

Zadanie 5

Załóżmy, że a, b, c, d są różnymi przedmiotami. Jakie zależności muszą zachodzić między nimi, żeby zachodziły następujące równości:

a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$
b) $\{a, b, a\} = \{a, b\}$
c) $\{\{a, b\}, a\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Zadanie 6

Które z następujących twierdzeń są prawdziwe (1 w rachunku zbiorów oznacza zbiór uniwersalny – czyli zbiór zawierający wszystkie możliwe elementy w danym kontekście):

a) $A \cup B = B \cup A$

Odp: Załóżmy, że $A = \{1, 2\}$, a $B = \{3, 4\}$. Wtedy $B \cup A = \{1, 2, 3, 4\}$. Ponieważ suma zbiorów jest operacją przemienną, kolejność elementów nie ma znaczenia — zbiory te są równe.

b) $A \cap B = B \cap A$
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup C)$
d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C))$
f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C))$
g) $A \cup \emptyset = A$
h) $A \cap \emptyset = A$
i) $A \cup A = 1$
j) $A \cap (-A) = \emptyset$

Zadanie 7

Udowodnij, że dla każdego zbioru A, B, C, D zachodzą następujące równości:

a) $[(A \cup B) - C] = [(A - C) \cup (B - C)]$

Przykład:

$$x \in [(A \cup B) - C] \equiv x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \equiv (x \in A \wedge x \notin \mathrm{C})$$
$$\vee(x \in B \wedge x \notin C) \equiv x \in (A - C) \vee x \in (B - C) \equiv x \in [(A - C) \cup (B - C)]$$

b) $[A - (B - C)] = [(A - B) \cup (A \cap C)]$
c) $[(A - B) \cup C] = [(A \cup C) - B] \cup (B \cap C)$
d) $-(A \cup B) = (-A \cap -B)$
e) $-(A \cap B) = (-A \cup -B)$

Zadanie 8

Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

a) $A \cup B \subset A \cap B$
Odp: Nie jest prawdziwe bo, inkluzja nie zachodzi.

b) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = (A \cup B)$
Odp: Prawdziwe.

c) $(A \subset B) \rightarrow (A - B) = \emptyset$
Odp: Prawdziwe.

d) $(A \subset B) \rightarrow A = B$
e) $A \cup \neg A$
f) $A \cap -A = \mathbb{V}$
g) $x \in (-A \cup -B) \rightarrow (A \subset -B)$

Zadanie 9

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny następujących relacji R:

a) bycia bratem;

Przykład: $x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy$, dziedzina: zbiór mężczyzn mających rodzeństwo.

b) bycia babcią;
c) bycia uczniem;
d) bycia podzbiorem;
e) wynikania logicznego.

Zadanie 10

Scharakteryzuj od strony własności formalnych relację:

a) bycia znajomym;

Przykład:

Niech xRy = „x jest znajomym y"; ponieważ każdy jest znajomym siebie samego, relacja R jest zwrotna, R jest również symetryczna, bo $\forall x, \forall y(xRy \rightarrow yRx)$, ale nie jest przechodnia, bo znajomi mojego znajomego nie muszą być moimi znajomymi, czyli $\exists(x, y, z)(xRy \wedge yRz \rightarrow \neg xRz)$.

b) bycia bratem;
Odp: przechodnia, niezwrotna, asymetryczna

c) bycia starszym;
d) bycia rówieśnikiem;
e) bycia młodszą siostrą;
f) bycia bratową;
g) zawierania się zbiorów.

Zadanie 11

Określ dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole każdej z następujących relacji:

a) bycia starszym,

b) bycia młodszym,

c) bycia rówieśnikiem,

d) bycia nie młodszym,

e) bycia nie starszym,

f) bycia wyższym,

g) bycia równym (pod względem wzrostu),

h) bycia bratem,

i) bycia ojcem,

j) bycia mężem,

k) bycia matką,

l) bycia wnukiem,

m) bycia przełożonym,

n) bycia opiekunem,

o) należenia do tej samej partii politycznej,

p) wyznawanie tej samej religii,

q) równoległość prostych,

r) prostokątność prostych,

s) podzielność liczb (w zbiorze liczb całkowitych),

t) większość liczb (w zbiorze liczb rzeczywistych),

u) mniejszość lub równość liczb (w zbiorze liczb rzeczywistych),

v) bycie trzykrotnością (w zbiorze liczb naturalnych),

w) inkluzji zbiorów,

x) inkluzji właściwej zbiorów,

y) wynikania logicznego,

przy założeniu, że relacje *a*–*p* są określone na zbiorze wszystkich ludzi.

Zadanie 12

Zbadaj, które z podanych niżej układów założeń, dotyczących stosunków między zbiorami A, B, C, są sprzeczne. Dla układów niesprzecznych wskaż przykład zbiorów, które je spełniają.

(a)

$$\begin{aligned} A \cap (-B) &= \emptyset \\ A \cap B &= \emptyset \end{aligned}$$

Zbadajmy układ:

$$\begin{aligned} A \cap (-B) &= \emptyset \\ A \cap B &= \emptyset \end{aligned}$$

Analiza
Pierwsze równanie:

$$A \cap (-B) = \emptyset \quad \rightarrow \quad A \subset B$$

Drugie równanie:

$$A \cap B = \emptyset \quad \rightarrow \quad A \subset -B$$

Zatem:

$$A \subset B \quad \text{oraz} \quad A \subset -B \rightarrow A \subset B \cap -B \rightarrow A \subset \emptyset \rightarrow A = \emptyset$$

Wniosek
Układ jest niesprzeczny tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$.
Przykład zbiorów spełniających warunki gdy $A = \emptyset$

$$\begin{aligned} A &= \emptyset \\ B &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Wówczas:

$$A \cap (-B) = \emptyset \quad \text{oraz} \quad A \cap B = \emptyset$$

(b)

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \\ A \cap B &= A \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} A \cap (-B) &= \emptyset \\ A \cap B &= \emptyset \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} (-A) \cap (-B) &\neq \emptyset \\ A \cap B &= B \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} A \cap B &\neq \emptyset \\ B \cap C &= \emptyset \\ A \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \\ B \cap C &= \emptyset \\ A \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= A \\ A \cap (B - C) &= \emptyset \\ A \cap (B \cap C) &= \emptyset \\ A \cap (C - B) &= \emptyset \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} A &\subset B \\ B &\subset C \\ A &\subset C \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} A &\subset B \\ B &\subset A \\ A &\neq B \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} A &\subset B \cup C \\ A \cap B &= \emptyset \\ A \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned} A \subset C \\ B \subset C \\ A \cap B \neq \emptyset \\ C \cap (-A \cup -B) = \emptyset \end{aligned}$$

O iloczynie względnym relacji

Iloczynem względnym relacji R i relacji S nazywamy relację, która zachodzi między przedmiotami x i y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest w relacji R do pewnego przedmiotu z będącego w relacji S do y:

$$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z \, (xRz \wedge zSy)\}$$

Przykład:

Niech dane są trzy zbiory:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad C = \{X, Y\}.$$

oraz relacje:

$$R = \{(1, a), (2, b), (3, c)\} \subseteq A \times B,$$

$$S = \{(a, X), (b, Y), (c, X)\} \subseteq B \times C.$$

Iloczyn względny relacji R i S definiujemy jako:

$$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z \, (xRz \wedge zSy)\}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} (1, a) \in R, &\quad (a, X) \in S \to (1, X) \in R \circ S, \\ (2, b) \in R, &\quad (b, Y) \in S \to (2, Y) \in R \circ S, \\ (3, c) \in R, &\quad (c, X) \in S \to (3, X) \in R \circ S. \end{aligned}$$

Zatem wynikowy iloczyn względny to:

$$R \circ S = \{(1, X), (2, Y), (3, X)\}.$$

Zadanie 13

Podaj iloczyny względne następujących relacji, a jeśli iloczyn nie zachodzi wyjaśnij dlaczego:

a) bycia ojcem i bycia ojcem,

Przykład:

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y \, (x \text{ jest ojcem } y \text{ i } y \text{ jest ojcem } z)\}$$

b) bycia matką i bycia matką,

c) bycia dzieckiem i bycia dzieckiem,

d) bycia żoną i bycia synem,

e) bycia mężem i bycia córką,

f) bycia ojcem i bycia mężem,

g) bycia ojcem i bycia żoną.

Teraz podaj przykład relacji (jeśli jest to możliwe) która jest:

h) niezwrotna i asymetryczna,

i) niezwrotna i przechodnia,

j) niespójna i przechodnia,

k) spójna i przechodnia,

l) równoważnościowa i porządkująca częściowo zbiór A,

m) równoważnościowa i porządkująca liniowo zbiór A.

5. Węższy rachunek predykatów (WRP)

5.1 Wprowadzenie

Rachunek zdań, jako jedna z podstawowych gałęzi logiki, pozwala na analizę relacji między całymi zdaniami, lecz nie umożliwia uwzględnienia wewnętrznej struktury twierdzeń dotyczących konkretnych obiektów i ich cech. W celu przezwyciężenia tego ograniczenia wprowadza się węższy rachunek predykatów (nazywany też logiką pierwszego rzędu z ang. *First-order logic*), który umożliwia rozumowania z „dokładnością do struktury wewnętrznej zdań”, czyli umożliwia mówienie o własnościach przedmiotów indywidualnych albo o relacjach zachodzących między indywiduami.

W tym rozdziale omówimy przekład zdań z języka naturalnego na język węższego rachunku predykatów, diagramy Venna oraz podstawowe prawa dotyczące węższego rachunku predykatów.

5.2 Wyrażenia rachunku predykatów

Rozważmy następujące wnioskowanie:

Każdy uczeń jest młodym człowiekiem.

Każda matka ucznia jest matką młodego człowieka.

Chociaż oba występujące w tym wnioskowaniu zdania są zdaniami kategorycznymi, a wnioskowanie intuicyjnie wydaje się poprawne, nie można jego poprawności zbadać za pomocą teorii zdań kategorycznych, mimo że słowa „uczeń”, „młody człowiek” występują i w przesłance i we wniosku. Jednak we wniosku słowa te nie są terminami, ale częściami terminów. Schemat powyższego wnioskowania należy więc napisać w postaci:

$$\frac{S\ a\ P}{M\ a\ N}$$

(gdzie S — „uczeń”, P — „młody człowiek”, M — „matka ucznia”, N — „matka młodego człowieka”).

Taki schemat nie jest formalnie poprawny. Choć w przesłance i wniosku występują te same słowa, to jednak różne terminy. Z punktu widzenia teorii zdań kategorycznych mamy więc wnioskowanie o czterech całkowicie różnych terminach, a wtedy wniosek oczywiście nie da się uzasadnić w oparciu o przesłankę. Przyczyną niemożności adekwatnego zapisania w języku teorii zdań kategorycznych schematu powyższego wnioskowania jest **zbyt ubogi język tej teorii** — nie występują w nim zwroty umożliwiające wyrażenie relacji między przedmiotami (a relacji dotyczy zarówno zwrot „matka ucznia”, jak i zwrot „matka młodego człowieka”). Musimy poszukiwać takiego języka, w którym można wypowiadać się na temat relacji.

Odpowiednio bogaty język, który umożliwia badanie poprawności tego rodzaju wnioskowań, występuje w **węższym rachunku predykatów** (czasem zwanym również rachunkiem kwantyfikatorów); teoria zdań kategorycznych może być traktowana (po przyjęciu pewnych założeń dodatkowych - niżej powiemy jakich) jako część węższego rachunku predykatów. Warto zauważyć, że rachunek predykatów rozszerza możliwości teorii zdań kategorycznych, umożliwiając precyzyjne przedstawienie zależności między obiektami, co jest szczególnie ważne w przypadku analizy relacji, jak np. "matka ucznia" czy "matka młodego człowieka".

Wszelkie zdania języka potocznego, jakim się posługujemy, mogą być podzielone na zdania podmiotowo-orzecznikowe (Jan jest rybakiem) lub podmiotowo-orzeczeniowe (Jan lubi Marię), przy czym zdania podmiotowo-orzecznikowe można przedstawić jako pewną postać zdań podmiotowo-orzeczeniowych (wtedy bierzemy pod uwagę podmiot - "Jan" + orzeczenie imienne "jest rybakiem", złożone z łącznika "jest" oraz orzecznika "rybakiem"). W rachunku predykatów, jako podstawową, zakładamy strukturę zdań podmiotowo-orzeczeniową. Przykładami zdań jednostkowych o takiej strukturze są:

- Jan śpi.
- Jan śpiewa.

- Jan jest kawalerem.
- Jan jest wyższy od Piotra.
- Jan kocha Zenobię.
- Jan siedzi pomiędzy Karolem a Zenobią.

Pierwsze trzy zdania stwierdzają własności indywiduum (człowieka o imieniu Jan): jego stany, cechy lub czynności, jakie wykonuje, natomiast trzy następne zdania stwierdzają relacje zachodzące między indywiduami — parą indywiduów („jest wyższy od", „kocha") lub trójką indywiduów („siedzi między . . . a . . . ").

Zwroty, które określają własności indywiduów lub wyrażają zachodzenie relacji między indywiduami, nazywamy predykatami. Predykaty w tym kontekście pełnią kluczową rolę, ponieważ umożliwiają przedstawienie zarówno cech indywidualnych, jak i interakcji między jednostkami w bardziej złożonych strukturach zdań.

Charakteryzowane od strony syntaktycznej predykaty są funktorami zdaniotwórczymi od jednego, lub więcej niż jednego, argumentu nazwowego. Przykładami predykatów jednoargumentowych są: „śpi", „śpiewa", „jest człowiekiem", „jest kawalerem", a przykładami predykatów więcej niż jednoargumentowych zwroty: „lubi", „jest wyższy od", „siedzi między . . . a . . . ", i tym podobne.

W rachunku predykatów nazwom jednostkowym (o których „myślimy" w taki sposób jak o nazwach indywidualnych) odpowiadają zmienne indywiduo-nazwowe (reprezentowane przez zmienne x, y, z), natomiast predykatom odpowiadają zmienne reprezentujące predykaty (zmienne A, B, C, P, Q). Oczywiście zdania proste języka rachunku predykatów mogą być łączone w zdania złożone, dlatego u podstaw węższego rachunku predykatów, podobnie jak u podstaw teorii zdań kategorycznych, przyjmuje się klasyczny rachunek zdań. Rachunek predykatów rozróżnia między zmiennymi indywidualnymi a zmiennymi predykatowymi, daje to znacznie większą elastyczność w modelowaniu złożonych zależności między obiektami.

W analizowanym na początku rozdziału wnioskowaniu nie występują jednak zdania jednostkowe, lecz zdania kategoryczne stwierdzające, że wszystkie elementy jakiegoś zbioru przynależą do innego zbioru. Zdanie kategoryczne, przypomnijmy, zbudowane jest z dwóch nazw ogólnych oraz funktora zdaniotwórczego od tych nazw. Funktor ten wyraża „ile" przedmiotów jednego zbioru (wskazanego przez podmiot zdania) posiada cechę stwierdzaną w orzeczniku („każdy jest", „niektóre są", „niektóre nie są", „żaden nie jest"). W rachunku predykatów stałymi logicznymi służącymi do stwierdzenia tego, ile przedmiotów (indywiduów) posiada jakąś własność lub pozostaje względem siebie w jakiejś relacji, są kwantyfikatory.

Wyrażenia węższego rachunku predykatów

Przykłady wyrażeń zdaniowych węższego rachunku predykatów:

a) Wyrażenia atomiczne

Najprostsze wyrażenia tego rachunku, np.:

$$A(x), \quad B(c), \quad P(x, y, b)$$

b) Wyrażenia złożone

Powstają poprzez łączenie zmiennych zdaniowych lub wyrażeń atomicznych za pomocą funktorów prawdziwościowych, np.:

$$p \lor P(x, b), \quad A(x) \to P(a, x, z)$$

c) Wyrażenia zawierające kwantyfikatory

Wyrażenia, w których skład wchodzi kwantyfikator wiążący zmienną indywiduową, np.:

$$(\exists x)(A(x) \to B(y)), \quad p \to (\forall x)(A(x) \to B(y)), \quad (\forall x)p$$

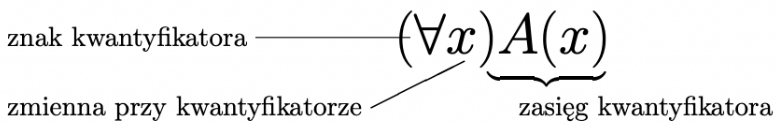
Przykłady niepoprawnych wyrażeń

Nie wszystkie ciągi symboli są poprawnie skonstruowane. Przykłady błędnych zapisów:

- $A(p)$ – zmienna zdaniowa nie może być argumentem predykatu.
- $(\exists A)(A(x) \to B(x))$ – kwantyfikator nie może wiązać zmiennych reprezentujących predykaty.
- $(\forall)A(x)$ – brak zmiennej przykwantyfikatorowej wskazującej, która zmienna jest wiązana przez kwantyfikator.

Kwantyfikatory są operatorami, które **wiążą zmienne**, co oznacza, że kwantyfikatory uniemożliwiają podstawianie za zmienną przez nie wiązaną. Zmienna **wolna** to taka, która występuje w wyrażeniu i nie jest związana kwantyfikatorem, można więc podstawiać za nią dowolne wyrażenia.

W kontekście wyrażeń z kwantyfikatorami stosuje się kilka istotnych terminów, które precyzują sposób ich użycia.



Termin „zasięg kwantyfikatora” oznacza wyrażenie zdaniowe, w którym zmienna wskazana przy kwantyfikatorze (objęta działaniem kwantyfikatora) jest związana przez ten kwantyfikator.

Kiedy zmienna jest wolna?

Zmienna α jest **wolna** w danym miejscu wyrażenia ϕ, jeśli:

1. Występuje w tym miejscu wyrażenia ϕ.
2. Nie znajduje się przy kwantyfikatorze.
3. Nie jest w zasięgu żadnego kwantyfikatora.

Zmienna α jest **wolna w całym wyrażeniu** ϕ, jeśli istnieje choć jedno miejsce w ϕ, w którym jest wolna.

Przykłady

- $(\forall x)(A(x) \to B(y))$
  - x **nie jest zmienną wolną**, ponieważ jest związana przez kwantyfikator.
  - y **jest zmienną wolną**, ponieważ kwantyfikator dotyczy tylko x.
  - z **nie jest zmienną wolną**, ponieważ w ogóle nie występuje w tym wyrażeniu.
- $(\forall x)A(y) \to B(x)$
  - x **jest zmienną wolną**, ponieważ występuje poza zasięgiem swojego kwantyfikatora.
  - y **jest zmienną wolną**.
  - z **nie jest zmienną wolną**, ponieważ nie występuje w wyrażeniu.

W logice zmienne dzieli się na **wolne i niewolne**. Zmienna niewolna to taka, która jest związana przez kwantyfikator lub w ogóle nie występuje w danym wyrażeniu.

Kwantyfikatory a zmienne związane

W wyrażeniach postaci $(\forall\alpha)\phi$ oraz $(\exists\alpha)\phi$ kwantyfikator **wiąże zmienną** α, jeśli:

- α występuje bezpośrednio przy nim.
- α była zmienną wolną w ϕ, zanim zastosowano kwantyfikator.

Zasady poprawnego podstawiania zmiennych

Podstawianie wartości lub innych wyrażeń za zmienne powinno odbywać się zgodnie z określonymi regułami, aby nie prowadziło do błędnych wniosków. Oto dwa podstawowe warunki poprawnego podstawiania:

1. **Zachowanie spójności** – w każdym miejscu, gdzie występuje wolna zmienna α, podstawiamy to samo wyrażenie.
2. **Unikanie zmiany statusu zmiennej** – żadna zmienna wolna w podstawianym wyrażeniu nie może stać się związana w wyniku podstawienia.

Przykład błędnego podstawienia

Rozważmy wyrażenie $(\exists x)(x > y)$, które jest prawdziwe dla liczb naturalnych – dla każdej liczby istnieje większa od niej. Jeśli jednak podstawimy za y zmienną x, otrzymamy:

$$(\exists x)(x > x)$$

które to wyrażenie jest fałszywe. Takie podstawienie jest **niepoprawne**, ponieważ narusza drugi warunek – zmienna x, która była wolna przed podstawieniem, stała się związana na miejscu podstawienia w wyniku podstawienia.

5.3 Przekład zdań z języka naturalnego na zapis kwantyfikatorowy

Aby poprawnie przekształcić zdanie z języka naturalnego na formalny zapis w logice predykatów, należy wykonać kilka kroków:

Identyfikacja kluczowych pojęć i ich reprezentacja

- **Obiekty** – przedmioty, osoby, liczby itp. reprezentowane zmiennymi (x, y, z).
- **Relacje** – związki między obiektami (np. „kocha", „uczy się", „ma ojca"), zapisujemy jako predykaty $(P(a, b),\ R(x, y))$.
- **Własności** – cechy obiektów (np. „być liczbą", „być człowiekiem"), również zapisujemy jako predykaty $(\mathit{Liczba}(x),\ \mathit{Człowiek}(y))$.

Określenie kwantyfikacji

- **Ogólne („każdy", „wszyscy", „zawsze"):**

  Przykład: Każdy student lubi logikę.

  $$(\forall x)(\mathit{Student}(x) \rightarrow \mathit{Lubi\ logikę}(x))$$

  Przykład: Każdy student jest człowiekiem.

  $$(\forall x)(\mathit{Student}(x) \rightarrow \mathit{Człowiek}(x))$$

- **Szczegółowe („istnieje", „co najmniej jeden"):**

  Przykład: Niektórzy ludzie są studentami.

  $$(\exists x)(\mathit{Człowiek}(x) \land \mathit{Student}(x))$$

Kwantyfikator o ograniczonym zakresie

Kwantyfikatory ogólny i szczegółowy działają „z dokładnością do uniwersum”, czyli wszystkich przedmiotów. Tymczasem na co dzień stosujemy kwantyfikację ograniczoną do pewnego podzbioru uniwersum. Na przykład zdania dotyczące studentów rozpatrujemy w zbiorze ludzi, a zdania o kaczkach – w zbiorze ptaków czy kręgowców, nie biorąc pod uwagę bakterii, praw logiki czy samochodów autonomicznych. W takich przypadkach ograniczamy zakres oddziaływania kwantyfikatora do określonego podzbioru uniwersum. Takie kwantyfikatory odpowiadają zwrotom:

- „Każdy x mający cechę A ma cechę B” – oznacza to, że dla każdego x, o ile posiada cechę A, to ma także cechę B:
$$(\forall x)(A(x) \to B(x))$$
- „Pewien (jakiś) x mający cechę A ma cechę B” – oznacza to, że istnieją w uniwersum takie x, które mają zarówno cechę A, jak i cechę B:
$$(\exists x)(A(x) \land B(x))$$

Kwantyfikatory ilościowe

Kwantyfikatory ilościowe w logice umożliwiają dokładne opisanie liczby elementów, które spełniają określoną właściwość lub relację.

- **Co najwyżej jeden**: Oznacza, że nie jest tak, że istnieją co najmniej dwa elementy spełniające daną właściwość.
  - Formalnie zapisujemy jako:
  $$(\forall x \forall y)\,(P(x) \land P(y) \to x = y)$$
  - Oznacza to, że jeżeli dla dwóch elementów x i y zachodzi $P(x)$ i $P(y)$, to muszą być sobie równe.
  - Przykład: Na statku może być co najwyżej jeden kapitan. Formalnie:
  $$(\forall x \forall y)\,(Kapitan(x) \land Kapitan(y) \to x = y)$$
- **Dokładnie jeden**: Oznacza, że istnieje co najmniej jeden i co najwyżej jeden element, tj. tylko jeden element spełniający daną właściwość.
  - Formalnie zapisujemy jako:
  $$\exists! x\, P(x) \quad \text{(Istnieje dokładnie jeden } x\text{, taki że } P(x) \text{ jest prawdziwe)}$$
  - Jest to połączenie dwóch warunków:
    * **Co najmniej jeden**: $\exists x\, P(x)$ (istnieje co najmniej jeden element x, który spełnia $P(x)$).
    * **Co najwyżej jeden**: $\forall x \forall y\,(P(x) \land P(y) \to x = y)$ (dla dowolnych x i y, jeżeli oba spełniają $P(x)$, to muszą być sobie równe).
  - Przykład: Istnieje dokładnie jeden prezydent Polski.
  $$\exists! x\,(Prezydent(x) \land Polska(x))$$

5.4 Zadania

1. Zapisz w języku rachunku predykatów następujące zdania:

a) *Każdy kot jest ssakiem.*

Rozwiązanie:

Krok 1. Naszym zadaniem jest znalezienie, o jakich obiektach mówimy w zdaniu. W tym przypadku mówimy o „kotach", czyli obiektem będzie „kot". Zatem, przyjmujemy, że x to dowolny kot.

Krok 2. Następnie musimy określić, jakie właściwości przypisujemy tym obiektom. W tym zdaniu mówimy, że „kot jest ssakiem", więc przypisujemy dwa predykaty:

- $A(x)$ – „x jest kotem"
- $B(x)$ – „x jest ssakiem"

Krok 3. Należy rozpoznać, jaki kwantyfikator pasuje do zdania. Ponieważ w zdaniu mówimy, że *każdy kot* jest ssakiem, używamy **kwantyfikatora ogólnego** $(\forall)$, który oznacza „dla każdego".

Krok 4. Po określeniu predykatów i kwantyfikatora, zapisujemy zdanie w postaci formalnej. Ponieważ chcemy powiedzieć, że każdy kot spełnia oba warunki (jest kotem i jest ssakiem), zapisujemy to w następujący sposób:

$$(\forall x)(A(x) \to B(x))$$

Oznacza to: **„Dla każdego obiektu x, jeśli x jest kotem, to x jest ssakiem."**

b) *Istnieje przynajmniej jeden człowiek, który zna język francuski.*

Rozwiązanie:

Krok 1. Szukamy obiektów, o których mowa w zdaniu. W tym przypadku mówimy o „ludziach", czyli obiektem będzie „człowiek". Zatem, przyjmujemy, że x to dowolny człowiek.

Krok 2. Określamy właściwości, które przypisujemy tym obiektom. W tym zdaniu mówimy, że „człowiek zna język francuski", więc przypisujemy dwa predykaty:

- $C(x)$ – „x jest człowiekiem"
- $F(x)$ – „x zna język francuski"

Krok 3. Dopasowujemy kwantyfikator. W zdaniu mówimy, że *istnieje przynajmniej jeden człowiek*, który zna język francuski, używamy **kwantyfikatora egzystencjalnego** $(\exists)$, który oznacza „istnieje przynajmniej jeden".

Krok 4. Zapisujemy zdanie w postaci formalnej. Ponieważ chcemy powiedzieć, że istnieje przynajmniej jeden człowiek, który spełnia oba warunki (jest człowiekiem i zna język francuski), zapisujemy to w następujący sposób:

$$(\exists x)(C(x) \land F(x))$$

Oznacza to: **„Istnieje przynajmniej jeden obiekt x, który jest człowiekiem i zna język francuski".**

c) *Żaden logik nie jest przestępcą.*

Rozwiązanie:

Krok 1. Określamy, o jakich obiektach mówi zdanie. W tym przypadku są to „logicy", więc przyjmujemy, że x oznacza dowolnego logika.

Krok 2. Teraz ustalamy, jakie właściwości przypisujemy tym obiektom. W zdaniu mowa o tym, że „logik nie jest przestępcą", więc definiujemy dwa predykaty:

- $L(x)$ – „x jest logikiem"
- $P(x)$ – „x jest przestępcą"

Krok 3. Rozpoznajemy odpowiedni kwantyfikator. Zdanie „Żaden logik nie jest przestępcą” oznacza, że dla każdego logika zachodzi zaprzeczenie bycia przestępcą. Używamy więc **kwantyfikatora ogólnego** ($\forall$), który oznacza „dla każdego”. Możemy również wyrazić to zdanie przy użyciu **kwantyfikatora egzystencjalnego** ($\exists$) w postaci zaprzeczenia, które przeczy istnieniu logika będącego przestępcą.

Krok 4. Na podstawie powyższych ustaleń zapisujemy formalną postać zdania. Z użyciem kwantyfikatora ogólnego:

$$(\forall x)(L(x) \rightarrow \sim P(x))$$

co oznacza: **„Dla każdego obiektu x, jeśli x jest logikiem, to x nie jest przestępcą.”**

Alternatywnie, możemy zapisać to zdanie przy użyciu kwantyfikatora egzystencjalnego w postaci zaprzeczenia:

$$\sim (\exists x)(L(x) \wedge P(x))$$

co można odczytać jako: **„Nie istnieje żaden logik, który byłby przestępcą.”**

d) *Każdy filozof jest uczniem pewnego logika.*

Rozwiązanie:

Krok 1. Szukamy obiektów, o których mowa w zdaniu. W tym przypadku mówimy o „filozofach” i „logikach”, czyli obiektami będą „filozof” i „logik”. Zatem, przyjmujemy, że x to dowolny filozof, a y to dowolny logik. Jest to przykład trudniejszy, ponieważ zdanie zawiera **relację dwuargumentową**, czyli relację „bycia uczniem”. Zatem obiekty, o których mowa, będą musiały być połączone relacją, która mówi, że jeden z nich jest uczniem drugiego.

Krok 2. Określamy predykaty, które przypisujemy tym obiektom. W tym zdaniu mówimy, że „filozof jest uczniem logika”, więc przypisujemy trzy predykaty:

- $F(x)$ – „x jest filozofem”
- $B(y)$ – „y jest logikiem”
- $P(x, y)$ – „x jest uczniem y”

Krok 3. Dopasowujemy kwantyfikatory. W zdaniu mówimy, że *dla każdego filozofa* istnieje logik, którego jest uczniem. Używamy **kwantyfikatora ogólnego** ($\forall$) dla filozofa oraz **kwantyfikatora egzystencjalnego** ($\exists$) dla logika, którego jest uczniem.

Krok 4. Zapisujemy zdanie w postaci formalnej. Chcemy powiedzieć, że **dla każdego** filozofa **istnieje** logik, którego jest uczniem. Warto zauważyć, że przy kwantyfikatorze ogólnym stosujemy *implikację* ($\rightarrow$), ponieważ mówimy, że jeśli filozofem jest x, to dla niego istnieje odpowiedni logik. Natomiast przy kwantyfikatorze egzystencjalnym stosujemy *koniunkcję* ($\wedge$), ponieważ dla konkretnego filozofa istnieje *jednocześnie* logik, który jest jego uczniem.

$$(\forall x)(F(x) \rightarrow (\exists y)(B(y) \wedge P(x, y)))$$

Oznacza to: **„Dla każdego obiektu x, jeśli x jest filozofem, to istnieje taki obiekt y, że y jest logikiem i x jest uczniem y.”**

e) *Wszyscy studenci są osobami wykształconymi.*

f) *Żaden pracownik nie jest robotem.*

g) *Każdy przedsiębiorca prowadzi działalność gospodarczą.*

h) *Żaden milioner nie jest ubogi i nie doświadcza braku zasobów.*

i) *Istnieją artystki, które są utalentowane.*

j) *Wszyscy nauczyciele są mądrzy.*

k) *Wszyscy programiści piszą kod. (Oznaczenia: A – jest programistą, B – jest kodem, R – pisze)*

l) *Nie wszyscy uczniowie mają zwierzęta domowe.*

m) *Niektórzy sportowcy nie jedzą mięsa.*

n) *Niektórzy lekarze są doradcami każdego pacjenta.*

o) *Każdy siatkarz jest wyższy od Jana.*

p) *Każde skrzydło (jakiegoś) ptaka jest skrzydłem (jakiegoś) zwierzęcia.*

r) *Każdy samochód ma kierowcę, który dba o niego, jeśli samochód jest sprawny.*

2. Sprawdź za pomocą diagramów Venna czy poniższe wyrażenie jest prawem logiki.

a)

$$(\forall x)(A(x) \land B(x)) \to [(\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)]$$

Rozwiązanie:

Krok 1. Wyrażenie ma postać implikacji, więc możemy założyć prawdziwość poprzednika. W logice klasycznej, aby udowodnić prawdziwość implikacji, wystarczy przyjąć, że poprzednik jest prawdziwy, a następnie sprawdzić, czy prowadzi to do prawdziwości następnika.

$$(\forall x)(A(x) \land B(x))$$

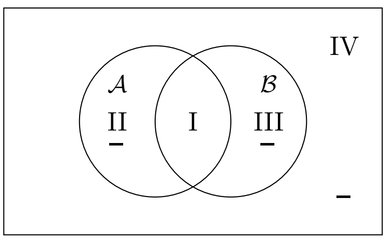
Oznacza to, że dla każdego elementu x w uniwersum U przedmiot ten posiada obie te właściwości naraz. W terminach teorii zbiorów oznacza to, że zbiorem pustym jest podzbiór uniwersum zawierający elementy, które **nie posiadają zarówno własności** $A(x)$**, jak i** $B(x)$.

Krok 2. Rysujemy diagram Venna. Diagram Venna dla dwóch własności A i B dzieli przestrzeń uniwersum na cztery obszary:

- Obszar I: Elementy posiadające zarówno A, jak i B.
- Obszar II: Elementy posiadające A, ale nie B.
- Obszar III: Elementy posiadające B, ale nie A.
- Obszar IV: Elementy nieposiadające ani A, ani B.

Założenie $(\forall x)(A(x) \land B(x))$ oznacza, że **wszystkie elementy uniwersum znajdują się w obszarze** I, a pozostałe obszary są puste. Zaznaczamy to na diagramie:

- Obszar II (elementy, które mają A, ale nie B) – pusty (oznaczamy „–”).
- Obszar III (elementy, które mają B, ale nie A) – pusty („–”).
- Obszar IV (elementy, które nie mają ani A, ani B) – pusty („–”).



Krok 3. Analizujemy prawdziwość następnika implikacji $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$:

- Pustość obszarów III i IV oznacza, że **nie istnieją elementy, które nie należą do** $\mathcal{A}$, co oznacza, że $A(x)$ jest prawdziwe dla każdego x w uniwersum.
- Pustość obszarów II i IV oznacza, że **nie istnieją elementy, które nie należą do** $\mathcal{B}$, czyli $B(x)$ jest prawdziwe dla każdego x w uniwersum.

Oznacza to, że następnik implikacji:

$$(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$$

jest prawdziwy, więc zdanie jest prawdziwe.

Krok 4. Założenie poprzednika prowadzi do prawdziwości następnika, dowiedliśmy, że wyrażenie:

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow [(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)]$$

jest **prawem logiki**.

b)

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

Rozwiązanie:

Krok 1. Zakładamy prawdziwość poprzednika implikacji. Wyrażenie ma postać implikacji, zakładamy, że poprzednik implikacji jest prawdziwy. Zatem przyjmujemy za prawdziwe wyrażenie:

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$$

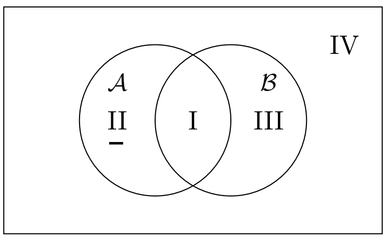
Oznacza to, że dla każdego elementu x w uniwersum, jeśli $A(x)$ jest prawdziwe, to $B(x)$ musi być również prawdziwe. Zatem **wszystkie elementy, które należą do $\mathcal{A}$, muszą także należeć do $\mathcal{B}$**.

W diagramie Venna oznacza to, że **obszar II** (gdzie $A(x)$ jest prawdziwe, a $B(x)$ fałszywe) musi być pusty, ponieważ nie mogą istnieć elementy, które należą do $\mathcal{A}$, ale nie należą do $\mathcal{B}$.

Krok 2. Rysujemy diagram Venna dla dwóch zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, dzieląc przestrzeń uniwersum na cztery obszary. Założenie $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ oznacza, że **obszar II musi być pusty** (bo implikacja $A(x) \rightarrow B(x)$ jest fałszywa, gdy $A(x)$ jest prawdziwe, a $B(x)$ - fałszywe), a inne obszary **mogą** zawierać elementy.

Na diagramie Venna oznaczamy, że:

- **Obszar II** (gdzie $A(x)$ jest prawdziwe, a $B(x)$ fałszywe) – pusty („–”).
- **Obszar I** (gdzie $A(x)$ i $B(x)$ są prawdziwe) – może zawierać elementy.
- **Obszar III** (gdzie $B(x)$ jest prawdziwe, ale $A(x)$ fałszywe) – może zawierać elementy.
- **Obszar IV** (gdzie ani $A(x)$, ani $B(x)$ nie są prawdziwe) – może zawierać elementy.



Krok 3. Teraz analizujemy prawdziwość następnika implikacji:

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

Oznacza to, że **musi istnieć przynajmniej jeden element**, który spełnia zarówno $A(x)$, jak i $B(x)$, czyli musi znajdować się w obszarze wspólnym I. W diagramach Venna w obszarze wspólnym obu zbiorów winien znaleźć się znak "+".

Krok 4. **Następnik implikacji nie jest spełniony**, ze względu na brak znaku "+" w obszarze wspólnym, zatem wyrażenie:

$$(\forall x)(A(x) \to B(x)) \to (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

nie jest prawem logiki.

c) $(\forall x)[A(x) \to B(x)] \wedge (\exists x)[C(x) \wedge A(x)] \to (\exists x)[C(x) \wedge B(x)]$

Rozwiązanie:

Krok 1. Tym razem zajmiemy się nieco trudniejszym przykładem. Mamy do czynienia z wyrażeniem zawierającym trzy predykaty – A, B oraz C. Znów zakładamy prawdziwość poprzednika implikacji, zatem przyjmujemy za prawdziwe wyrażenie:

$$(\forall x)[A(x) \to B(x)] \wedge (\exists x)[C(x) \wedge A(x)]$$

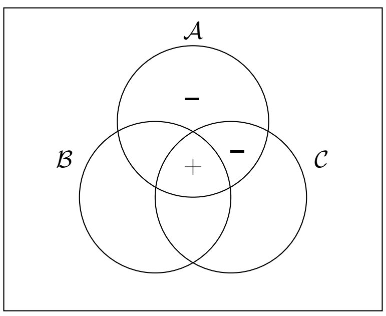
Oznacza to, że:

- $(\forall x)[A(x) \to B(x)]$ oznacza, że dla każdego x, jeśli $A(x)$ jest prawdziwe, to $B(x)$ również musi być prawdziwe.
- $(\exists x)[C(x) \wedge A(x)]$ oznacza, że istnieje co najmniej jeden element, który spełnia zarówno $C(x)$, jak i $A(x)$.

Krok 2. Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, dzieląc przestrzeń uniwersum na osiem obszarów. Założenie $(\forall x)(A(x) \to B(x))$ oznacza, że **obszar, w którym** $A(x)$ **jest prawdziwe, ale** $B(x)$ **fałszywe, musi być pusty**, natomiast drugie założenie $(\exists x)[C(x) \wedge A(x)]$, wskazuje na istnienie elementów posiadających $C(x)$ i $B(x)$.

Na diagramie Venna oznaczamy:

- Znakiem (–), gdzie $A(x)$ jest prawdziwe, a $B(x)$ fałszywe.
- Znakiem (+), gdzie $C(x)$ jest prawdziwe i $A(x)$ jest prawdziwe



Krok 3. Teraz analizujemy prawdziwość następnika implikacji:

$$(\exists x)[C(x) \wedge B(x)]$$

Oznacza to, że **musi istnieć przynajmniej jeden element**, który spełnia zarówno $C(x)$, jak i $B(x)$. Wiemy, że istnieje element, który spełnia $C(x)$ i $A(x)$, ten sam element musi również spełniać $B(x)$. Zatem następnik implikacji jest spełniony.

Krok 4. Wniosek. Ponieważ założenie prowadzi do prawdziwości następnika, wyrażenie:

$$(\forall x)[A(x) \to B(x)] \wedge (\exists x)[C(x) \wedge A(x)] \to (\exists x)[C(x) \wedge B(x)]$$

jest prawem logiki.

d) $(\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \to [(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)]$
e) $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \wedge (\exists x)A(x) \to (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$
f) $\sim (\forall x)A(x) \to (\exists x) \sim A(x)$
g) $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \to [(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)]$
h) $(\forall x)[A(x) \to B(x)] \to [(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)]$
i) $(\exists x)[A(x) \vee B(x)] \to [(\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)]$
j) $[(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)] \to (\forall x)[A(x) \vee \sim B(x)]$
k) $(\forall x) \sim A(x) \to \sim (\exists x) \sim A(x)$
l) $[(\forall x)(A(x) \to \sim B(x)) \wedge (\exists x)A(x)] \to (\exists x) \sim B(x)$
m) $[(\forall x)(A(x) \to \sim B(x)) \wedge (\exists x)(A(x) \wedge C(x))] \to [(\exists x)(C(x) \wedge \sim B(x))]$
n) $(\forall x)[A(x) \to B(x)] \wedge (\forall x)[A(x) \to C(x)] \wedge (\exists x)A(x) \to (\exists x)[C(x) \wedge B(x)]$
o) $(\forall x(A(x) \to C(x)) \wedge \forall x(C(x) \to \sim B(x))) \to \sim \exists x(A(x) \wedge B(x))$
p) $(\forall x)(A(x) \to C(x)) \wedge (\exists x)(C(x) \wedge \sim A(x)) \to (\forall x)(A(x) \to B(x))$

3. Podaj po dwa przykłady zdań języka polskiego odpowiadających następującym wyrażeniom rachunku predykatów.

a) $\forall x(A(x) \to B(\text{Jan}, x))$

Rozwiązanie:

Krok 1. Na początku staramy się zrozumieć, co oznacza powyższe wyrażenie. Możemy to odczytać jako: *"Dla każdego obiektu x, jeśli x ma własność A, to Jan jest w relacji B z x."*

Krok 2. Naszym zadaniem jest stworzyć takie zdanie w języku naturalnym, które będzie pasować do wyrażenia w języku predykatów. Na początku może to sprawiać trudności, szczególnie jeśli wyrażenie jest długie, jednak wystarczy trochę praktyki, by ta czynność stała się intuicyjna.

Zatem przykładem zdania w języku polskim odpowiadającego wyrażeniu $\forall x(A(x) \to B(\text{Jan}, x))$ mogą być:

- Każdy logik jest naśladowany przez Jana, czyli Jan naśladuje wszystkich, którzy lubią logikę.
- Każdy filozof jest szanowany przez Jana, czyli Jan szanuje wszystkich filozofów.

W pierwszym przypadku predykat $A(x)$ oznacza, że x lubi logikę, natomiast $B(\text{Jan}, x)$ oznacza, że pomiędzy Janem a x istnieje relacja naśladownictwa.

W drugim przypadku predykat $A(x)$ oznacza, że x jest filozofem, natomiast $B(\text{Jan}, x)$ oznacza, że pomiędzy Janem a x istnieje relacja szanowania.

Tym sposobem, po dokładnym przeanalizowaniu wyrażenia w języku predykatów, udało nam się znaleźć przykłady zdań w języku naturalnym. Proces tłumaczenia zdań z języka naturalnego na język logiki predykatów, oraz odwrotnie, staje się bardziej intuicyjnie zgodny z praktyką. **Warto zacząć od rozbicia wyrażenia na mniejsze części i zastanowienia się, co oznaczają poszczególne kwantyfikatory, zmienne oraz relacje.** Praktyka w tłumaczeniu zdań z języka naturalnego na język logiki predykatów i odwrotnie pozwala lepiej zrozumieć strukturę logiczną wypowiedzi i precyzyjnie wyrażać myśli.

b) $(\forall x)[P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to R(x, y))]$

Rozwiązanie:

Krok 1. Tak jak w powyższym przykładzie staramy się przełożyć zdanie w języku predykatów na język naturalny. Odczytujemy wyrażenie jako: *"Dla każdego obiektu x, jeśli x ma własność P, to dla każdego obiektu y, jeśli y ma własność Q, to między x a y istnieje relacja R."*

Krok 2. Próbujemy stworzyć zdanie w języku naturalnym, dzieląc je na mniejsze części i weryfikując, czy nasze tłumaczenie jest poprawne.
Przykładowe zdania mogą wyglądać w ten sposób:

- Każde zwierzę, o ile jest ptakiem, może żyć w każdym miejscu, pod warunkiem że jest ono lasem.
- Dla każdego pacjenta, który ma alergię, każdy lekarz, który specjalizuje się w leczeniu alergii, może leczyć tego pacjenta.

W pierwszym przypadku:

- $P(x)$ oznacza, że x jest ptakiem.
- $Q(y)$ oznacza, że y jest lasem.
- $R(x, y)$ oznacza, że pomiędzy ptakiem x a lasem y zachodzi relacja R, tzn. "ptak x może żyć w lesie y".

W drugim przypadku:

- $P(x)$ oznacza, że x jest pacjentem chorującym na alergię.
- $Q(x)$ oznacza, że lekarz y specjalizuje się w leczeniu alergii.
- $R(x, y)$ oznacza, że pomiędzy pacjentem x a każdym lekarzem y zachodzi relacja R, tzn. "pacjent x może leczyć się u lekarza y".

c) $(\forall x)[A(x) \to (\exists y)(A(y) \land B(x, y))] \land \exists x A(x)$

Rozwiązanie:

Krok 1. Przekładamy zdanie w języku predykatów na język naturalny. Odczytujemy wyrażenie jako: *"Dla każdego obiektu x, jeśli $A(x)$, to istnieje obiekt y, który również ma właściwość $A(y)$ i pomiędzy x a y zachodzi relacja $B(x, y)$. Ponadto, istnieje przynajmniej jeden obiekt, który ma właściwość $A(x)$."*

Krok 2. Próbujemy stworzyć zdanie w języku naturalnym, dzieląc je na mniejsze części i weryfikując czy nasze tłumaczenie jest poprawne.
Przykładowe zdania mogą wyglądać w ten sposób:

- Każdy filozof jest uczniem filozofa i przynajmniej jeden filozof istnieje.
- Każdy student znajduje pomoc u innego studenta i przynajmniej jeden student istnieje.

W pierwszym przypadku:

- $A(x)$ oznacza, że x filozofem.
- $B(x, y)$ oznacza, że pomiędzy filozofem x a filozofem y zachodzi relacja B, tzn. "filozof x jest uczniem y".

W drugim przypadku:

- $A(x)$ oznacza, że x jest studentem.
- $B(x, y)$ oznacza, że pomiędzy studentem x a studentem y zachodzi relacja B, tzn. "student x znajduje pomoc u studenta y".

d) $\forall x\,(A(x) \rightarrow \sim B(x))$
e) $(\exists x)\,(\forall y)\,P(x, y)$
f) $(\exists x)\,[A(x) \wedge \sim B(x)]$
g) $\exists x\,(A(x) \wedge \sim B(x)) \wedge \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$
h) $\exists x \exists y\,(A(x) \wedge B(y) \wedge \sim R(x, y))$
i) $\exists x\,(A(x) \wedge \sim B(x)) \wedge \forall y\,(C(y) \rightarrow D(x, y))$
j) $\forall x\ [(P(x) \wedge \sim Q(x)) \rightarrow (\exists y\ \sim R(x, y))]$
k) $\forall x\ (A(x) \rightarrow (\exists y\ (B(y) \wedge P(x, y))))$
l) $\forall x\ [(P(x) \wedge \sim Q(x)) \rightarrow (\exists y\ \sim R(x, y))]$
m) $\exists x\ [P(x) \wedge (\forall y\,(R(x, y) \rightarrow \sim Q(y)))]$
n) $\sim \exists x\,(A(x) \wedge \forall y\,(B(y) \rightarrow \sim R(x, y)))$
o) $\sim \exists x\,(A(x) \wedge \forall y\,(B(y) \rightarrow R(x, y)))$

4. Sformułuj w języku węższego rachunku predykatów następujące prawa teorii zdań kategorycznych oraz tryby sylogistyczne, a następnie zweryfikuj ich prawdziwość za pomocą diagramów Venna. Jakie założenie należy uwzględnić przy takim przekładzie?

a) $S\,a\,P \rightarrow S\,i\,P$

Rozwiązanie:

Krok 1. Przekładamy zdania kategoryczne na węższy rachunek predykatów. Każdy tryb sylogistyczny można zapisać w następujący sposób:

- Zdanie ogólno-twierdzące ($S\ a\ P$): $\forall x(S(x) \rightarrow P(x)) \wedge (\exists x)S(x)$
- Zdanie szczegółowo-twierdzące ($S\ i\ P$): $\exists x(S(x) \wedge P(x))$
- Zdanie ogólno-przeczące ($S\ e\ P$): $\forall x(S(x) \rightarrow \sim P(x))$
- Zdanie szczegółowo-przeczące ($S\ o\ P$): $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$

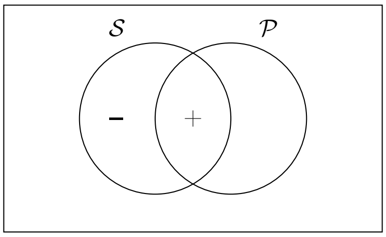
Podczas takiego przekładu konieczne jest uwzględnienie pewnych założeń dotyczących istnienia elementów w klasach pojęciowych:

- W przypadku zdania ogólnotwierdzącego ($S\ a\ P$) sama implikacja $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$ nie gwarantuje, że jakiekolwiek $S(x)$ faktycznie istnieje. Bez dodatkowego założenia o istnieniu elementów w S zdanie mogłoby być spełnione nawet wtedy, gdy klasa S byłaby pusta. Aby uniknąć tego problemu, dodajemy warunek $\exists x S(x)$, który zapewnia, że klasa S nie jest pusta i zawiera co najmniej jeden element.
- Dla zdania szczegółowoprzeczącego ($S\ o\ P$) wyrażenie $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$ oznacza, że istnieje przynajmniej jeden element, który należy do S, ale nie należy do P. Jednak w sytuacji, gdy zbiór S jest pusty ($\sim \exists x S(x)$), zdanie to nadal powinno pozostać prawdziwe, niezależnie od predykatu $P(x)$. Dlatego w formalnym zapisie dopuszczamy alternatywę, która pozwala na spełnienie zdania nawet wtedy, gdy nie istnieje żadne x należące do S.

Przekształcamy zapis $S\,a\,P \rightarrow S\,i\,P$ na węższy rachunek predykatów:

$$(\forall x(S(x) \to P(x)) \land \exists x S(x)) \to \exists x(S(x) \land P(x))$$

Krok 2. Musimy sprawdzić prawdziwość wnioskowania, więc wykorzystujemy diagramy Venna.



Wnioskowanie jest poprawne, ponieważ wynika bezpośrednio z przesłanek.

b) Celarent

Rozwiązanie:

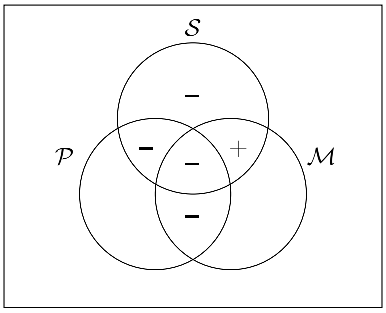
Krok 1. Zapisujemy tryb sylogistyczny w języku predykatów.

$$M\ e\ P \land S\ a\ M \to S\ e\ P$$

W rachunku predykatów wygląda następująco:

$$\forall x(M(x) \to \sim P(x)) \land \forall x(S(x) \to M(x)) \land \exists x S(x) \to \forall x(S(x) \to \sim P(x))$$

Krok 2. Sprawdzamy prawdziwość wnioskowania, rysując diagram Venna.



- Z pierwszej przesłanki wynika, że nie istnieje część wspólna zbioru M oraz P.
- Z drugiej przesłanki wynika, że każde S jest M. Oznacza to, że nie istnieją elementy S poza M.
- Trzecia przesłanka wskazuje, że istnieje przynajmniej jeden obiekt należący do zbioru S.

Wnioskowanie jest poprawne, ponieważ wynika bezpośrednio z przesłanek.

c) $S\,e\,P \to \sim S\,a\,P$
d) Ferio
e) Baroco
f) $S\,a\,P \to S\,o\,P$
g) $\sim S\,i\,P \to S\,o\,P$

h) $M\,a\,P \wedge S\,a\,M \rightarrow S\,a\,P$
i) Camestres
j) $P\,i\,M \wedge M\,i\,S \rightarrow S\,i\,P$
k) Datisi
l) $M\,e\,P \wedge M\,i\,S \rightarrow S\,o\,P$
m) $P\,a\,M \wedge M\,o\,S \rightarrow S\,o\,P$
n) Fesapo
o) Cesare

5. Zapisz w sposób formalny następujące zdania.

a) *Każda liczba jest równa sobie samej.*

Rozwiązanie:

W tych zadaniach konieczne będzie użycie relacji równości (identyczności) oraz kwantyfikatora jednostkowego. Poza tym, zdania nie różnią się w znaczący sposób od tych, które rozwiązywaliśmy w zadaniu 1.

To zdanie wyraża podstawową własność równości, czyli zwrotność. Możemy je zapisać w postaci:

$$\forall x(L(x) \rightarrow x = x)$$

Objaśnienie zapisu:

- $\forall x$ – dla każdego obiektu x,
- $L(x)$ – x jest liczbą,
- $x = x$ – liczba jest równa samej sobie

Zapis ten formalnie mówi, że **dla każdej liczby jest tak, że jest ona równa samej sobie**.

b) *Istnieją co najmniej dwie liczby pierwsze.*

Rozwiązanie:

W tym przypadku konieczne będzie użycie kwantyfikatorów egzystencjalnych oraz predykatu $P(x)$, oznaczającego, że x jest liczbą pierwszą. To zdanie wyraża istnienie co najmniej dwóch liczb pierwszych. Możemy je zapisać w postaci:

$$\exists x \exists y\,(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$$

Objaśnienie zapisu:

- $\exists x$ – istnieje obiekt x,
- $\exists y$ – istnieje obiekt y,
- $P(x)$ – x jest liczbą pierwszą,
- $P(y)$ – y jest liczbą pierwszą,
- $x \neq y$ – liczby x i y są różne

Zapis ten formalnie mówi, że **istnieją przynajmniej dwie różne liczby pierwsze**. Ponieważ faktycznie liczby pierwsze istnieją i jest ich nieskończenie wiele (np. 2 i 3), zdanie to jest prawdziwe.

c) *Istnieje co najwyżej jedna liczba π*
d) *Istnieje liczba najmniejsza.*
e) *Nie istnieje liczba największa.*

f) *Każde dwie liczby równe trzeciej są równe między sobą.*

g) *Co najmniej jeden student kocha logikę.*

h) *Każdy student ma dokładnie jednego ojca.*

i) *Istnieje przynajmniej jeden kot, który lubi mleko.*

j) *Każdy nauczyciel w szkole ma co najmniej dwóch uczniów.*

k) *Każda liczba nieparzysta jest większa od zera lub jest mniejsza od zera.*

l) *Istnieje dokładnie jedna liczba naturalna, która jest liczbą pierwszą i parzystą.*

m) *Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje co najmniej jedna liczba większa od niej.*

n) *Istnieje co najmniej jedna liczba całkowita, która jest większa od każdej liczby naturalnej.*

o) *Każdy student ma co najmniej jednego kolegę, który mieszka w tym samym mieście.*

6. Zagadki logiczne

6.1 Wprowadzenie

Zagadki logiczne to ważny element intelektualnej tradycji, wykorzystywany zarówno w edukacji, jak i rozrywce umysłowej. Raymond Smullyan, amerykański matematyk i logik, stał się znany dzięki swoim oryginalnym łamigłówkom, które łączyły logikę formalną z paradoksami. Jego książki, takie jak "Dama czy tygrys?", wprowadziły czytelników w świat zagadek związanych z prawdą, fałszem, a także dedukcją.

Smullyan wykorzystał klasyczne struktury logiczne, aby rozwijać umiejętności rozumowania i dedukcji. Zagadki logiczne stały się popularnym narzędziem edukacyjnym, pomagającym w nauce matematyki, filozofii czy psychologii poznawczej, rozwijając zdolności do rozwiązywania trudnych problemów.

Poniżej znajdują się ułożone przez niego zagadki lub takie mocno nimi inspirowane, przygotowaliśmy ich dziewiętnaście, nie znaczy to jednak, że nie ma ich więcej. Szczerze zachęcamy do samodzielnego szukania dodatkowych zagadek i ich rozwiązywania, nawet gdy konkurs się skończy.

Jeśli będziesz miał z jakąś problem lub będzie dla ciebie nie jasna nie wstydź się sprawdzić w internecie.

6.2 Zagadka wyspiarzy

Na wyspie mieszkają dwa typy ludzi: rycerze, którzy zawsze mówią prawdę, oraz oszuści, którzy zawsze kłamią. Na wyspie są dwie osoby: A i B. A mówi: „B jest oszustem.” B mówi: „A jest rycerzem.” Kto jest kim?

Przykład - rozwiązanie zagadki

Krok 1: Wypiszmy wszystkie możliwe kombinacje, w których mogą występować napotkane osoby. Oczywiście będzie ich 2^n, gdzie n to liczba spotkanych osób. W tym przypadku mamy cztery kombinacje:

	I	II	III	IV
Osoba A	Rycerz	Rycerz	Oszust	Oszust
Osoba B	Rycerz	Oszust	Rycerz	Oszust

Krok 2: Sprawdźmy po kolei wszystkie kombinacje.

- **Sytuacja I:** Pierwszą sytuację odrzucamy, ponieważ przy założeniu, że obaj są rycerzami, osoba A mówi nieprawdę, a to jest dla rycerza niemożliwe.
- **Sytuacja II:** Pasuje do założeń, że osoba B jest rycerzem, a osoba A łotrem.
- **Sytuacja III:** Odrzucamy, ponieważ osoba B jest łotrem, a wtedy jej zdanie o osobie A powinno być fałszywe.
- **Sytuacja IV:** Odrzucamy, bo osoba A mówi prawdę, co przeczy temu, że jest łotrem.

Zostaje nam jedyna poprawna możliwość: osoba B jest rycerzem, a osoba A łotrem.

6.3 Królewska zagadka

Król i królowa są za kurtyną. Król zawsze mówi prawdę, a królowa zawsze kłamie. Jakie pytanie należy zadać, aby dowiedzieć się, kto jest kim?

Rozbicie problemu:

- **Król mówi prawdę** – Zawsze odpowiada zgodnie z rzeczywistością.
- **Królowa kłamie** – Zawsze odpowiada w sposób przeciwny do rzeczywistości.

Teraz kluczowe jest to, jak zbudować pytanie, które pozwoli na rozróżnienie, kto jest kim, biorąc pod uwagę te dwa zachowania.

Analiza pytania:

Pytanie: *„Gdybym zapytał drugą osobę, kto jest królem, co by odpowiedziała?”*

Jeśli pytasz króla:

- Król mówi prawdę.
- Król wie, że królowa zawsze kłamie, więc jeśli zapytasz ją, kto jest królem, ona wskaże królową, bo królowa by kłamała.
- Ponieważ król mówi prawdę, powie, że królowa wskaże królową (bo królowa by kłamała i nie powiedziałaby prawdy).

Jeśli pytasz królową:

- Królowa kłamie.
- Królowa wie, że gdyby zapytać króla, odpowiedziałby prawdę i wskazałby króla.
- Ponieważ królowa kłamie, zamiast powiedzieć, że król by wskazał króla, ona skłamie i powie, że król wskaże królową.

Co z tego wynika:

W obu przypadkach, zarówno pytając króla, jak i królową, otrzymasz odpowiedź wskazującą królową jako osobę, która nie jest królem.

Dlaczego to działa:

- Król zawsze mówi prawdę i przewiduje, że królowa wskaże królową.
- Królowa zawsze kłamie, więc skłamie na temat odpowiedzi króla i również wskaże królową.

W efekcie osoba, którą wskazała odpowiedź, jest królową, a osoba, która nie została wskazana, jest królem.

6.4 Zagadka o Tomaszu

Załóżmy, że następujące dwa zdania są prawdziwe: (1) Tomasz kocha Klarę lub Tomasz kocha Matyldę. (2) Jeżeli Tomasz kocha Klarę, to kocha Matyldę. Czy ze zdań (1) (2) wynika, że Tomasz kocha Klarę czy wynika z nich, że kocha Matyldę?

Rozwiązanie: Ze zdań (1) (2) nie wynika, że Tomasz kocha Klarę, lecz wynika, że Tomasz kocha Matyldę. Wniosek opiera się na następującym rozumowaniu. Tomasz kocha Klarę lub jej nie kocha. Jeżeli Tomasz nie kocha Klary, to na mocy (1) Matylda jest dziewczyną, którą kocha Tomasz (na mocy założenia, że Tomasz kocha co najmniej jedną z nich). Z drugiej strony, jeżeli Tomasz kocha Klarę, to na mocy (2), kocha również Matyldę. Zatem w każdym przypadku (czy kocha Klarę czy jej nie kocha) otrzymujemy wniosek, zgodnie z którym Tomasz kocha Matyldę.

6.5 Zagadka z liśćmi

Zadaj pytanie, które pozwala wyciągnąć wnioski o prawdziwości pewnych stwierdzeń, kiedy osoba mówi: "To, co mówię, jest prawdziwe."

Rozwiązanie: Jeśli ktoś mówi: "To, co mówię, jest prawdziwe", musisz zapytać o stwierdzenie, które sprawdza się w obu przypadkach. Na przykład: "Czy to zdanie jest prawdziwe?"Jeśli osoba mówi prawdę, to jej wypowiedź jest spójna. Jeśli kłamie, jej wypowiedź będzie sprzeczna.

6.6 Zagadka dwóch braci

Dwóch braci, jeden zawsze mówi prawdę, drugi zawsze kłamie. Jeden z nich mówi: „Jeśli zapytasz mojego brata, czy jestem kłamcą, on ci powie, że tak." Co odpowiedziałby drugi brat na to pytanie?

Rozwiązanie: Jeśli pierwszy brat mówi prawdę, to jego brat (który kłamie) odpowiedziałby „tak", bo zawsze kłamie. Jeśli drugi brat mówi prawdę, odpowiedź byłaby „nie", ponieważ to on nie jest kłamcą.

6.7 Zagadka o mostach

Cztery osoby chcą przejść przez most w nocy. Most jest wystarczająco szeroki, aby tylko dwie osoby mogły przejść na raz. Jedna osoba ma latarkę, która świeci tylko przez określoną ilość czasu. Zasadą jest, że każda osoba porusza się różnie szybko: jedna porusza się w 1 minutę, druga w 2 minuty, trzecia w 5 minut, a czwarta w 10 minut. Jak mogą przejść przez most w maksymalnym czasie 17 minut?

Rozwiązanie: Najlepsza strategia to: - Na początku 2 osoby przechodzą most, jedna wraca z latarką (czas 2 minut). - Następnie 2 osoby przechodzą most razem, a druga wraca (czas 5 minut). - Powtarzamy proces, dbając, by najszybsze osoby wracały z latarką. Dzięki temu cały proces odbywa się w 17 minut.

6.8 Zagadka piramidy

W piramidzie zamieszkuje 100 osób: 50 rycerzy i 50 oszustów. Każdy może widzieć innych ludzi, ale nie widzi samego siebie. Rycerze zawsze mówią prawdę, a oszuści zawsze kłamią. Jak mogą ci ludzie dowiedzieć się, kto jest kim?

6.9 Zagadka z wyspą

Jest 100 osób na wyspie. Na każdej z nich jest kapelusz, który jest czerwony lub niebieski. Każda osoba może widzieć kapelusze innych, ale nie swój. Ludzie mogą mówić tylko to, co widzą. Zasada: jeśli ktoś zobaczy, że wszyscy inni mają niebieskie kapelusze, to na pewno ma czerwony. Jak długo potrwa, zanim wszyscy dowiedzą się, jaki mają kapelusz?

6.10 Zagadkowa taktowność

Wacław pytany przez dziewczęta, którą z nich kocha, odpowiada, że prawdziwe są następujące dwa zdania: (1) Jeżeli kocham Klarę lub Matyldę, to kocham i Zenobię. (2) Nie jest tak, że jeżeli kocham Klarę, to nie kocham Zenobii. Na czym polega taktowność Wacława?

6.11 Zagadka o wrotkach

Jest dwóch ludzi, którzy mają wrotki: jeden zawsze mówi prawdę, a drugi zawsze kłamie. Kiedy pytasz, kto ma wrotki, jeden z nich odpowiada: „Mam wrotki!”. Który z nich ma wrotki?

6.12 Zagadka mordercy

Morderca zawsze kłamie, a niewinny zawsze mówi prawdę. Zadaj mordercy jedno pytanie, aby dowiedzieć się, kto jest mordercą.

6.13 Zagadka o koszach

W masie ludzi są dwie osoby. Jedna z nich ma kosz pełen złota, a druga kosz pełen diamentów. Każdy z nich mówi: „Jeśli poprosisz moją osobę o przyniesienie diamentów, otrzymasz diamenty.” Jak odgadnąć, kto ma co?

6.14 Zagadka od króla

Wyobraź sobie, że odwiedziłeś wyspę rycerzy, łotrów i zwykłych ludzi. Rozeszła się pogłoska, że jest na niej złoto, chciałeś więc ustalić, czy to prawda. Król wyspy, który był rycerzem, przedstawił cię trzem tubylcom i powiedział, że co najwyżej jeden z nich jest zwykłym człowiekiem. Pozwolono Ci zadać dowolnemu z nich - wedle twojego wyboru - dwa pytania, na które można odpowiedzieć „tak” lub „nie”. Czy jest jakiś sposób, by ustalić za pomocą dwóch pytań, czy na tej wyspie jest złoto?

6.15 Zagadka o przejściu przez most

Cztery osoby muszą przejść przez most w nocy. Most jest wystarczająco szeroki, aby tylko dwie osoby mogły przejść na raz. Jedna osoba ma latarkę, która świeci tylko przez określoną ilość czasu. Każda osoba ma różną prędkość: jedna porusza się w 1 minutę, druga w 2 minuty, trzecia w 5 minut, a czwarta w 10 minut. Jak mogą przejść przez most w czasie nieprzekraczającym 17 minut?

6.16 Zagadka o rycerzach i oszustach

Jest dwóch mężczyzn, A i B. A mówi: „B kłamie.” B mówi: „A mówi prawdę.” Kto jest kim?

6.17 Zagadka z mostem

Na wyspie znajduje się dwóch ludzi, którzy muszą przejść przez most w nocy. Most jest wystarczająco szeroki, aby tylko dwie osoby mogły przejść naraz, a każda osoba ma latarkę, która świeci przez określoną ilość czasu. Jedna osoba porusza się w 1 minutę, a druga w 3 minuty. Jak długo potrwa przejście przez most, jeśli obaj muszą przejść razem?

6.18 Zagadka o braciach

Dwóch braci, jeden zawsze mówi prawdę, drugi zawsze kłamie. Jeden z nich mówi: „Jeśli zapytasz mojego brata, czy jestem kłamcą, on ci powie, że tak.” Co odpowiedziałby drugi brat na to pytanie?

6.19 Zagadka o trzech znajomych

Andrzej powiedział, że ani Edward, ani Jan nie są prawdomówni. Edward powiedział, że Andrzej i Jan są prawdomówni. Jan stwierdził, że Andrzej jest prawdomówny lub Edward jest kłamcą. Kto jest prawdomówny a kto jest kłamcą?

6.20 Zagadka o trzech towarzyszach

Adrian powiedział: Ja i Andrzej, obydwaj jesteśmy prawdomówni lub obydwaj jesteśmy kłamcami. Andrzej powiedział: Ja i Jerzy jesteśmy prawdomówni. A Jerzy stwierdził: Mogę przyznać, że Adrian jest kłamcą. Kto jest prawdomówny. a kto jest kłamcą?

7. Teoria dyskusji, błędy logiczne i semiotyczne

7.1 Teoria dyskusji

Argumentowanie ma na celu przekonanie odbiorcy do naszych twierdzeń. W kontekście wymiany myśli, czyli dyskusji, nasze argumenty zawsze kierujemy do konkretnego adresata. Z tego powodu zamiast koncentrować się na prawdziwości naszych twierdzeń, często nadmiernie skupiamy się na wykazaniu rozmówcy, że mamy rację. W takich sytuacjach często popełniamy błędy w rozumowaniu. Warto więc zastanowić się, jakie wymogi powinna spełniać rzetelna dyskusja.

Dyskusja to ustna lub pisemna wymiana myśli między co najmniej dwoma uczestnikami, reprezentującymi zazwyczaj przeciwne poglądy lub dążenia. Prowadzona jest w określonym porządku i zmierza do osiągnięcia konkretnego celu poznawczego lub praktycznego. Możemy wyróżnić dwa podstawowe rodzaje dyskusji:

- Dyskusja oparta na współpracy — uczestnicy dążą do wspólnego celu
- Polemika — dominuje element sporu, ponieważ cele dyskutantów nie są zbieżne

Jeżeli polemika przekracza pewne granice (określone poniżej), zamienia się w kłótnię. Cele dyskusji mogą mieć charakter teoretyczny, gdy chodzi o ustalenie prawdziwości twierdzeń o rzeczywistości, lub praktyczny, gdy celem jest przyjęcie wspólnych zasad postępowania. Warto zaznaczyć, że jeśli w wymianie myśli nie zachodzi równy status uczestników, to nie jest to już dyskusja, lecz staje się dyktatem lub pouczeniem. Prawidłowa dyskusja naukowa powinna spełniać trzy grupy wymogów: wymagania naukowe, parlamentarne oraz swoiste dotyczące uzasadniania twierdzeń.

Wymogi naukowe

1. **Jasne sformułowanie problemu** — Zagadnienie naukowe, którego rozwiązanie jest celem dyskusji, powinno zostać jasno postawione na początku. Osoba inicjująca dyskusję powinna sformułować problem oraz zaproponować wstępne rozwiązanie.
2. **Wspólny język fachowy** — Wszyscy uczestnicy dyskusji powinni posługiwać się wspólnym językiem fachowym, zrozumiałym dla wszystkich. Używane terminy powinny być jednoznaczne, jasne i precyzyjne.
3. **Uzasadnienie zgodne z metodologią** — Twierdzenie poddawane dyskusji powinno być uzasadnione zgodnie z metodami przyjętymi w danej nauce. Jeśli jest to założenie fundamentalne (niemożliwe do uzasadnienia), wszyscy uczestnicy muszą je zaakceptować, aby dyskusja mogła być kontynuowana.

Wymogi parlamentarne

1. **Rola przewodniczącego** — Przed rozpoczęciem dyskusji należy wybrać przewodniczącego, który będzie dbał o porządek wewnętrzny i zewnętrzny dyskusji, przypominał o głównym temacie, zbierał wyniki, prostował tok myślenia dyskutantów i wskazywał kolejne etapy rozważań.
2. **Zasady uczestnictwa** — Uczestnicy dyskusji parlamentarnej powinni:
   - zabierać głos w ustalonej kolejności
   - wypowiadać się tylko wtedy, gdy mają coś istotnego do powiedzenia
   - powstrzymać się od ataków personalnych
   - unikać drażnienia innych uczestników

Wymogi dotyczące uzasadniania twierdzeń

1. **Ciężar dowodu** — Osoba stawiająca twierdzenie ma obowiązek je uzasadnić (łac. *onus probandi*). Pełni ona rolę defendenta (obrońcy) twierdzenia. Twierdzenie bez uzasadnienia może zostać wykluczone z dyskusji.
2. **Metody krytyki twierdzenia**:
   (a) **Krytyka uzasadnienia** — Wykazanie, że twierdzenie jest nieprawidłowo uzasadnione. Krytyk przyjmuje wtedy rolę oponenta (łac. *oppono*). Nie musi on udowadniać fałszywości atakowanego twierdzenia, wystarczy podważenie jego uzasadnienia (równoznaczne z postawieniem defendentowi zarzutu popełnienia błędu *petitio principii*).
   (b) **Krytyka wartości logicznej twierdzenia** — Wykazanie, że atakowane twierdzenie jest fałszywe. W tym przypadku krytyk sam staje się defendentem, ponieważ głosi negację atakowanego twierdzenia. Nie wystarczy samo stwierdzenie fałszywości — trzeba to udowodnić.

Erystyka zamiast dialektyki

Gdy w dyskusji dominuje element sporu, jej głównym celem staje się pokonanie przeciwnika. W takiej sytuacji zamiast dialektyki (wspólnego dochodzenia do prawdy) mamy do czynienia z erystyką (gr. *eristike techne* — sztuka sporu), czyli sztuką prowadzenia sporów w celu pokonania przeciwnika. W takiej walce stosuje się tzw. **chwyty erystyczne**, które zazwyczaj opierają się na nieprawidłowym przejściu od przesłanek do wniosku lub na przyjęciu nieuzasadnionej przesłanki. Podstawowe chwyty erystyczne to różne rodzaje błędu *ignoratio elenchi*, np. *argumentum ad hominem.*

7.2 Błędy logiczne

Rozumowanie to proces myślowy, w którym przechodzimy od pewnych twierdzeń (przesłanek) do innych twierdzeń (wniosków), dążąc do uzyskania doskonalszej wiedzy. Za wiedzę uznajemy zdania, które są zarówno prawdziwe, jak i odpowiednio uzasadnione.

Aby rozumowanie uznać za poprawne, muszą zostać spełnione dwa podstawowe warunki:

- Prawdziwość i odpowiednie uzasadnienie przesłanek
- Występowanie właściwej zależności logicznej między przesłankami a wnioskiem, charakterystycznej dla danego typu rozumowania

Naruszenie któregokolwiek z tych warunków prowadzi do błędu w rozumowaniu.

Główne kategorie błędów logicznych

I. Błędy w przyjmowanych przesłankach

1. **Błąd materialny** – występuje, gdy co najmniej jedna z przesłanek jest fałszywa.
2. **Petitio principii** – występuje, gdy jako przesłankę przyjmuje się zdanie nieuzasadnione.

II. Błędy w wyprowadzaniu wniosków

1. **Błąd formalny** – występuje, gdy we wnioskowaniu, uznanym przez nas za formalnie poprawne, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.
2. **Ignoratio elenchi** – występuje, gdy dowodzi się czegoś innego niż to, co miało być udowodnione.

Szczegółowa charakterystyka

Błąd materialny

Polega na nieświadomym przyjęciu fałszywej przesłanki. Historycznymi przykładami są średniowieczne przekonania, że "natura nie znosi próżni" lub że "Ziemia jest nieruchomym centrum Wszechświata". Warto zauważyć, że mimo błędnych przesłanek, czasami możliwe jest dojście do trafnych wniosków – jak w przypadku astronomii przedkopernikańskiej, która mimo błędnego założenia o centralnej pozycji Ziemi, potrafiła dzięki rozbudowanemu systemowi założeń pomocniczych poprawnie opisywać ruch ciał niebieskich.

Petitio principii

To błąd polegający na przyjęciu nieuzasadnionej przesłanki, często takiej, która jest tylko innym sformułowaniem wniosku. Termin pochodzi z łaciny (petitio – prośba, principium – zasada) i oznacza "roszczenie co do zasady". Klasycznym przykładem jest medyk z "Chorego z urojenia" Moliera wyjaśniający, że opium usypia, ponieważ posiada właściwości usypiające.

Ten błąd przybiera wiele form:

1. **Fałszywa przyczyna** – utożsamianie następstwa czasowego ze związkiem przyczynowym.
   Przykład: "Po tym, jak zaczęto budować nowy park, wzrosła liczba kradzieży, zatem park spowodował wzrost przestępczości"

2. **Pochopna generalizacja** – wyciąganie ogólnych wniosków na podstawie zbyt małej liczby przypadków.
   Przykład: "Znam dwie osoby, które wygrały na loterii, więc wygrana jest łatwa"

3. **Fałszywy dylemat** – opieranie rozumowania na pozornej dychotomii.
   Przykład: "Albo jesteś za nowym burmistrzem, albo jesteś przeciwnikiem rozwoju miasta"

4. **Błędna analogia** – porównywanie rzeczy czy sytuacji, które faktycznie nie są podobne.
   Przykład: "Nauczyciel nie powinien zmieniać metod nauczania, bo to jak kucharz, który zawsze gotuje według tego samego przepisu"

5. **Złożone pytanie** – formułowanie pytania, które sugeruje odpowiedź lub ogranicza możliwe odpowiedzi.
   Przykład: "Czy przestałeś ignorować potrzeby swoich współpracowników?"

Błąd formalny (non sequitur - łac. nie wynika)

Występuje, gdy we wnioskowaniu uznawanym przez rozumującego za dedukcyjne, wniosek w rzeczywistości nie wynika logicznie z przesłanek. Popełnia go osoba stosująca regułę wnioskowania, którą błędnie uważa za opartą na prawie logiki.

Przykład błędnego schematu:

Jeżeli p, to q
Nie jest tak, że p

Nie jest tak, że q

Podstawiając konkretne zdania:

Jeżeli pojazd jest samochodem, to jest pojazdem z silnikiem spalinowym lub elektrycznym.
Ten pojazd nie jest samochodem.

Ten pojazd nie jest pojazdem z silnikiem spalinowym lub elektrycznym.

Błąd rozumowania uwidacznia się, gdy podstawimy inne zdania:

Jeżeli ptak jest sową, to potrafi latać.
Ten ptak nie jest sową (np. orzeł).

Ten ptak nie potrafi latać. (wniosek fałszywy)

Ignoratio elenchi (łac. nieznajomość tego, co ma być dowodzone)

Polega na dowodzeniu czegoś innego niż to, co miało być udowodnione, przy zachowaniu pozorów, że dowód dotyczy właściwej kwestii. W tym przypadku nie występuje związek logiczny między przesłankami a wnioskiem – zostaje on zastąpiony związkiem skojarzeniowym, psychologicznym lub zwyczajowym. Gdy takie wadliwe rozumowanie stosowane jest celowo w sporze, mówimy o chwytach erystycznych – nierzetelnych zabiegach mających na celu pokonanie przeciwnika. Należą do nich:

1. **Argumentum ad hominem (łac. argument skierowany do człowieka)** – zwalczanie osoby przeciwnika zamiast jego tezy.

   Przykłady:

   - "Jak możesz krytykować tę politykę, skoro sam nigdy nie brałeś udziału w wyborach?"
   - "Twoje opinie nie mają żadnej wartości, bo przecież jesteś tylko studentem!"

2. **Argumentum ad personam** – bezpośredni atak na osobę przeciwnika, obrażanie go.

   Przykłady:

   - "Twoje pomysły są kompletnie bez sensu, zwłaszcza jak patrzę na twoje brzydkie ubrania!"
   - "Kto cię w ogóle słucha? Jesteś tylko kimś, kto nie potrafi wyjść z cienia rodziców!"

3. **Argumentum ad verecundiam** – nierzetelne posługiwanie się autorytetami w celu onieśmielenia przeciwnika.

   Przykłady:

   - "Wszyscy wiedzą, że Bill Gates wspiera rozwój sztucznej inteligencji, więc musisz przyznać, że to dobre rozwiązanie."
   - "Profesor X, wybitny specjalista w tej dziedzinie, twierdzi, że nie ma sensu rozmawiać na ten temat."

4. **Argumentum ad populum** – odwoływanie się do emocji słuchaczy zamiast do logiki.

   Przykłady:

   - "Nie możemy pozwolić, żeby w naszym kraju rosła liczba osób bezdomnych!" (odwołanie do emocji zamiast do faktów)
   - "Prawdziwi patrioci popierają ten projekt ustawy — jeśli kochasz swój kraj, też powinieneś!"

5. **Argumentum ad ignorantiam** – uznanie, że coś jest fałszywe, ponieważ nie udowodniono, że jest prawdziwe.

   Przykład:

   - "Nie ma dowodów na to, że woda na Marsie istnieje, więc na pewno jej tam nie ma."
   - "Nikt nie zdołał obalić istnienia kosmitów, więc na pewno istnieją."

6. **Argumentum ad baculum** – stosowanie gróźb zamiast argumentów.

   Przykłady:

   - "Jeśli nie zmienisz zdania, będziesz musiał zmierzyć się z konsekwencjami."
   - "Niech pan uważa, bo mogę podać pana do sądu!"

7.3 Błędy semiotyczne, czyli błędy w słownym wyrażaniu myśli

Semiotyka bada język przede wszystkim przez pryzmat efektywności komunikowania się. Komunikacja stanowi złożony proces, w którym ekonomiczność i skuteczność odgrywają kluczową rolę. Gdy te fundamentalne aspekty zostają naruszone, mówimy o błędach w słownym wyrażaniu myśli.

Źródła błędów komunikacyjnych

Przyczyny błędów komunikacyjnych można podzielić na dwie zasadnicze grupy:

I. Wadliwości charakterystyczne dla języka naturalnego, które z kolei dzielą się na:

- Błędy związane z wieloznacznością – zjawisko, w którym jeden wyraz lub wyrażenie może mieć więcej niż jedno znaczenie, prowadzące do potencjalnych nieporozumień komunikacyjnych.

  Przykłady:

  – Wyraz "zamek" może oznaczać:
    1. Mechanizm zamykający
    2. Budowlę obronną
    3. Element architektoniczny

  Amfibolia – jest to wieloznaczność wyrażenia złożonego spowodowana wadliwą składnią.

  Charakterystyczne cechy:

  – Nieprawidłowe rozmieszczenie wyrazów w zdaniu
  – Dwuznaczność struktury gramatycznej
  – Możliwość różnych interpretacji tego samego zdania

  Przykłady:

  – "Jan zakopał skarb wraz z żoną i teściową" – kto został zakopany?
  – "Kot wujka Jana pożarł sikorkę" – kto pożarł?

  Ekwiwokacja – błąd rozumowania polegający na wieloznacznym użyciu tego samego wyrazu w różnych znaczeniach.

  Mechanizm powstawania:

  – Zmiana znaczenia wyrazu w trakcie rozumowania
  – Pozorne zachowanie logiki wywodu
  – Wprowadzenie w błąd poprzez semantyczne przekształcenie

  Przykład:

  Każde małżeństwo jest umową.
  Niektóre małżeństwa mają dzieci.
  ____
  Niektóre umowy mają dzieci (wniosek błędny)

  Elipsa – rodzaj wieloznaczności wyrażenia złożonego (zdania) spowodowany "wypadnięciem" (niewypowiedzeniem) jego części, możliwej do domyślenia z kontekstu.

  Funkcje:

  – Skrócenie wypowiedzi
  – Pozostawienie przestrzeni na domysł słuchacza

- Nadanie dynamiki komunikatowi

Przykład:

- "Jan roztrwonił majątek swój i część żony"

- Problemy wynikające z nieostrości zakresów pojęć – kategorie, przy których istnieją przedmioty budzące wątpliwość co do przynależności. Nazwa charakteryzuje się nieostrością, gdy pojawiają się obiekty, wobec których niemożliwe jest jednoznaczne określenie, czy mieszczą się w jej semantycznym zasięgu.

  Przykłady:

  - Słowo "młody" – trudności w jednoznacznym określeniu granic:
    1. Trzylatek – "na pewno" młody
    2. Pięćdziesięciolatek – "na pewno" nie młody
    3. Dwudziestolatek – budzi wątpliwości
  - Zdanie "Jan jest łysy" może być różnie interpretowane np.
    * Dla Kunegundy zdanie jest prawdziwe, bo Jan ma tylko 600 włosów.
    * Dla Dobrosławy zdanie jest fałszywe, bo Jan posiada jakiekolwiek włosy.

- Niewyraźność treści wyrażeń – brak precyzji w użyciu słów, powodujący rozmycie znaczenia i utrudniający jednoznaczne zrozumienie. Nazwa ma treść niewyraźną, gdy niemożliwe jest zdefiniowanie wspólnego zbioru cech przysługujących wszystkim jej desygnatom.

  Przykłady:

  - Wyrażenia okazjonalne o zmiennym kontekście:
    1. "Student o imieniu Jan skończył odpowiadać na pytania profesora. Potem on powiedział..." – kto powiedział?
    2. „Po bitwie, w której Cezar pobił Pompejusza, wódz ten udał się do Egiptu" – który wódz?

II. Wadliwości wynikające z niestaranności, które można podzielić na:

- Używanie niezrozumiałych wyrażeń – posługiwanie się słownictwem, które jest jasne dla mówiącego, lecz całkowicie niejasne dla słuchacza.

  Przykłady:

  - Używanie hermetycznego języka specjalistycznego poza kontekstem naukowym
  - Stosowanie rzadkich terminów bez objaśnienia
  - Nadmierne komplikowanie prostych wypowiedzi

- Niejasność myślenia – niezdolność precyzyjnego wyrażenia własnych myśli, gdzie wypowiedź nie odpowiada dokładnie temu, co się zamierza przekazać.

  Przykłady:

  - Nieprecyzyjne definiowanie pojęć
  - Wieloznaczne opisy procesów np. "Aby poprawić wydajność zespołu, należy wprowadzić lepszą organizację pracy."
  - Nadmierne używanie terminologii naukowej bez jasnego kontekstu np.

    > "Modernizacja to proces, który polega na dążeniu elit danego narodu do redukcji swojego atymicznego statusu i osiągnięcia pozycji odpowiadającej innym dobrze rozwiniętym narodom."

- Niedopowiedzenia – opuszczanie istotnych składników wypowiedzi, utrudniające lub uniemożliwiające ocenę logiczną zdania.

  Rodzaje niedopowiedzeń:

  1. Niedopowiedzenia kwantyfikacji, gdy w wypowiedzi nie precyzuje się, ile obiektów oznaczanych przez podmiot zdania posiada cechę wyrażoną w orzeczeniu:
     - "Studenci są leniwi" (ilu?)
     - "Włosi są impulsywni" (którzy?)
  2. Niedopowiedzenia relatywizacji, kiedy zwroty relatywne traktuje się jak absolutne:
     - "Zenobia jest córką" (czyją?)
     - "Spotkanie odbędzie się o godz. 12.00" (kiedy?)

- Mieszanie znaczeń dosłownych i przenośnych – nieprawidłowe używanie zwrotów obrazowych, które może prowadzić do wieloznaczności lub niejasności.

  Przykłady:

  - Nadużywanie metafor w oficjalnych wypowiedziach
  - Nieprecyzyjne łączenie stylu dosłownego z poetyckim np.

    "Twoja dzielność nie znała granic. Zdobywając najwyższe szczyty unosiłeś się nad przepaściami swej słabości i lęku."

- Błąd figuralnego myślenia – dosłowne interpretowanie zwrotów obrazowych.

  Przykłady:

  - Dosłowne rozumienie metafor
  - Przykład: "Zgubiłem się w gąszczu informacji." – dosłowne traktowanie *gąszczu informacji* jako rzeczywistego lasu lub gęstych krzaków, w których ktoś się może fizycznie zgubić.

- Przesunięcie kategorialne – błędne kwalifikowanie przedmiotów lub zjawisk do niewłaściwych kategorii.

  Przykłady:

  - Nieprawidłowe przypisywanie cech lub własności
  - "Lęk jest zjawiskiem psychologicznym" (powinno być: „psychicznym")
  - "Skrócona metoda sprawdzania" (powinno być: „metoda skróconego sprawdzania")

7.4 Zadania

1. Jaki błąd popełniono w następujących rozumowaniach? Skorzystaj z wiedzy o błędach logicznych i niepoprawnych schematach wnioskowania.

a) Jeżeli pies szczeka, to ktoś stoi przed domem. Ktoś stoi przed domem. A więc pies szczeka.

b) Wszystkie łabędzie, które widziałem, były białe. A więc wszystkie łabędzie na świecie są białe.

c) Jeśli nie potrafisz udowodnić, że kosmici istnieją, to znaczy, że ich nie ma.

d) Mój znajomy pali od 30 lat i nie ma raka płuc, więc palenie papierosów wcale nie jest szkodliwe.

e) Jeżeli ktoś studiował prawo, to zna się na przepisach. Jan zna się na przepisach, więc na pewno studiował prawo.

f) Jeżeli produkt jest ekologiczny, to jest zdrowy. Ten produkt jest zdrowy, więc na pewno jest ekologiczny.

g) Nikt jeszcze nie udowodnił naukowo, że medytacja wydłuża życie, więc na pewno nie ma takiego wpływu.

h) Mój dziadek jadł dużo tłustego mięsa i dożył 95 lat, więc dieta bogata w tłuszcze zwierzęce jest zdrowa.

i) Nowy burmistrz zakazał palenia w parkach i od tego czasu spadła liczba przypadków astmy. Zatem zakaz palenia w parkach spowodował spadek zachorowań na astmę.

j) Albo zaakceptujesz podwyżkę czynszu, albo jesteś przeciwny rozwojowi naszego miasta.

k) Uczenie się nowego języka jest jak jazda na rowerze - wystarczy raz się nauczyć i nigdy się nie zapomina.

2. Kiedy chwyty erystyczne są błędami rozumowania, a kiedy nierzetelnymi sposobami argumentowania? Wyjaśnij różnice i podaj przykłady.

3. Jakiego chwytu erystycznego użyto w poniższych wypowiedziach?

a) Jeżeli nie poprą mnie Państwo w wyborach, to przestanę wspierać lokalne schronisko dla zwierząt.

b) Każdy inteligentny człowiek wie, że ta teoria jest słuszna.

c) Jak możesz mówić o uczciwości, skoro 10 lat temu dostałeś mandat za przejście na czerwonym świetle?

d) Nie możesz krytykować tej diety — przecież wymyśliła ją znana celebrytka!

e) Skoro wszyscy w internecie tak twierdzą, to na pewno to prawda.

f) Jeśli nie zgadzasz się z tą reformą, to znaczy, że nie zależy ci na przyszłości kraju.

g) Nie można ufać jego analizie ekonomicznej - wszyscy wiemy, że był członkiem partii, która doprowadziła kraj do kryzysu finansowego.

h) Jak można słuchać pańskich opinii na temat reformy służby zdrowia, skoro sam pan nie był u lekarza od dziesięciu lat?

i) Jak powiedział słynny profesor Oxford, "quantum fluctuations validate this hypothesis" - więc nie ma sensu dalej dyskutować.

j) Wszyscy mądrzy rodzice wybierają tę szkołę dla swoich dzieci. Czy naprawdę chcesz być jedynym, który postąpi inaczej?

k) Skoro nie potrafisz udowodnić, że te substancje nie powodują raka, to znaczy, że są niebezpieczne i powinny zostać zakazane.

l) Jeśli nie zgodzisz się na moje warunki, będę zmuszony poinformować radę nadzorczą o twoich nieautoryzowanych wydatkach służbowych.

m) Wyśmiewasz teorię spiskową, ale ciekawe, że pracujesz dla korporacji, która czerpie korzyści z obecnego systemu!

n) Jak możesz krytykować naszą partię? Przecież twój dziadek był funkcjonariuszem reżimu!

o) Nawet Arystoteles mówił, że "natura non facit saltum", więc twoja teoria ewolucji skokowej jest z gruntu fałszywa.

4. Przeanalizuj poniższe wypowiedzi i zastanów się, jak można by je poprawić.

a) Ta szczepionka musi być niebezpieczna — widziałem film na YouTube, który o tym mówił.

b) Szef zawsze ma rację, bo gdyby nie miał, nie byłby szefem.

c) Ostatnio czytałem opinię Einsteina o ekonomii, więc jego poglądy w tej kwestii muszą być słuszne.

d) Profesor wspomniał o szkodliwości fast foodów, ale sam widziałem go wczoraj w McDonald's.

e) Większość osób w naszym kraju uważa, że ten program społeczny jest dobry, więc musi być dobrym rozwiązaniem.

f) Albo jesteś za całkowitym zakazem palenia w miejscach publicznych, albo nie zależy ci na zdrowiu obywateli.

g) Wczoraj dostałem nagrodę, gdy miałem na sobie czerwony krawat. Dziś też założę czerwony krawat, bo przynosi mi szczęście.

h) Nie możesz udowodnić, że w tym lesie nie ma duchów, więc duchy naprawdę tam są.

i) Spotkałem dwóch agresywnych rowerzystów, więc wszyscy rowerzyści są agresywni.

j) Firma jest jak rodzina, a w rodzinie wszyscy powinni poświęcać się dla dobra wspólnego, więc powinieneś zostać po godzinach bez wynagrodzenia.

k) Czy przestałeś już oszukiwać na egzaminach?

l) Ten polityk kłamie przy każdej okazji, więc nie ma sensu słuchać jego argumentów w sprawie reformy podatkowej.

m) Skoro nie potrafisz udowodnić, że tego nie zrobiłeś, to znaczy, że jesteś winny.

n) Wychowanie dziecka jest jak uprawianie ogrodu - wystarczy podlewać rośliny od czasu do czasu, a wyrośnie z nich coś pięknego.

o) Jeśli nie poprę tej ustawy, posłowie opozycji zablokują inne moje inicjatywy.

5. Wymyśl własny przykład błędnego rozumowania lub chwytu erystycznego, a następnie wyjaśnij, dlaczego podane przez ciebie rozumowanie jest błędne.

6. Jaki rodzaj błędu popełniono w wypowiedziach?

a) W minioną niedzielę pan Kowalski zaprosił na uroczystość rodzinną swojego wieloletniego kolegę ze swoim rasowym psem.

b) W naszym sklepie internetowym dostępny jest elegancki, włoski garnitur dla mężczyzny w kratę.

c) Wybitni naukowcy z uniwersytetu w Cambridge po wielomiesięcznych obserwacjach odkryli nową planetę przez teleskop.

d) Jutro przyjdę do ciebie z dokumentami potrzebnymi do złożenia wniosku.

e) Ministerstwo Edukacji przeznaczy dodatkowe środki na wspieranie osób w trudnej sytuacji.

f) Proces anizotropowej ekstrakcji biomolekularnej wymaga skalowania tensorowego w celu osiągnięcia optymalnych parametrów.

g) Ten, no, ten dokument trzeba, wiesz, no zrobić, bo inaczej oni, no wiesz, mogą być niezadowoleni.

h) Kiedy skończysz, podaj mi to z szafki.

i) Firma podała wyniki do wiadomości zainteresowanych.

j) Nasza firma potrzebuje nowych głów do pracy nad innowacyjnym projektem technologicznym.

k) Jan zawsze mówi prawdę.

l) Prezydent miasta i rektor uniwersytetu podpisali umowę o współpracy, która była bardzo zadowolona z osiągniętego porozumienia.

m) Kupię książkę w twardej oprawie autorstwa profesora Kowalskiego.

n) Wczoraj zgubiliśmy Emilię w centrum handlowym podczas zakupów przedświątecznych

o) Zestresowani kierowcy powodują więcej wypadków.

p) Ambasador Francji spotkał się z ministrem spraw zagranicznych Polski w jego rezydencji.

r) Bank udzielił pożyczki młodemu małżeństwu w wysokim oprocentowaniu.

s) Młodzi ludzie coraz mniej czytają.

t) Implementacja paradygmatu dywergencyjnego w kontekście transwersalnym wymaga synergicznego podejścia.

u) Przekaż dokumenty Karolinie. Położyłem na biurku.

w) Ten pomysł ma nogi i może daleko zajść.

y) Komisja zebrała się na spotkaniu i doszła do ważnych wniosków, które następnie przegłosowała.

z) Profesor zaliczył egzamin studentowi.

7. Podaj po trzy przykłady zdań zawierających błędy: amfibolia, ekwiwokacja, niejasność myślenia oraz nieostrość pojęć.

8. Przekształć poniższe błędne wypowiedzi tak, aby usunąć występujące w nich błędy logiczne lub semiotyczne.

a) Albo zainwestujemy wszystkie środki w ten projekt, albo nasza firma upadnie.

b) Jan nie dostarczył dokumentów na czas, więc jest niesumiennym pracownikiem.

c) Uczestnicy spotkania podjęli decyzję, która usatysfakcjonowała wszystkich.

d) Minister przedstawił strategię rozwoju, która była bardzo optymistyczna odnośnie przyszłości gospodarczej.

e) Kocham muzykę, bo muzyka dostarcza mi przyjemności.

f) Nasze suplementy diety są naturalne, więc są całkowicie bezpieczne dla zdrowia.

g) Dziesięciu lekarzy poleca ten lek, zatem wszyscy lekarze są przekonani o jego skuteczności.

h) Powinieneś kupić to urządzenie, ponieważ firma, która je produkuje, działa od 50 lat.

i) Żaden uczciwy człowiek nie popiera tej ustawy, więc jeśli ją popierasz, jesteś nieuczciwy.

j) Mówiłem wielokrotnie o tym problemie, który wymaga natychmiastowego rozwiązania przez odpowiednie organy.

k) Ten produkt kupuje coraz więcej osób, więc musi być dobrej jakości.

l) Dyrektor firmy rozmawiał z pracownikami działu marketingu o ich pomysłach na swoim nowym biurku.

m) Większość studentów zdała egzamin, co oznacza, że był on łatwy.

n) Albo zwiększymy podatki, albo system opieki zdrowotnej się zawali.

o) Piłkarze naszej drużyny nie wygrali meczu, więc na pewno celowo grali słabo.

p) Komitet wybrał przewodniczącego, który był bardzo zadowolony ze swojego wyniku.

r) Moje stanowisko jest jedynym słusznym, ponieważ każdy rozsądny człowiek musi się z nim zgodzić.

s) Nauka języka obcego to inwestycja, która zawsze przynosi zyski w przyszłości.

t) Myślenie pozytywne leczy choroby, ponieważ osoby z pozytywnym nastawieniem rzadziej chorują.

u) Komputery firmy Apple są najlepsze, bo używają ich profesjonaliści.

w) Przekaż te informacje zespołowi. Wysłałem mailem.

y) Nasza rozmowa zapuściła korzenie, ale musimy ją przyciąć, bo zaraz kończy się czas spotkania.

z) Teoria ewolucji to tylko teoria, więc nie musi być prawdziwa.

8. Definicje w logice

8.1 Wprowadzenie

Logika, jako dziedzina matematyki i filozofii, zajmuje się badaniem zasad poprawnego rozumowania. W logice, precyzyjne definicje są kluczowe dla zrozumienia i formalizacji pojęć oraz twierdzeń. Definicje w logice służą do wyjaśnienia, jak różne terminy i obiekty są ze sobą powiązane oraz w jaki sposób można operować na tych terminach w sposób spójny i precyzyjny.

Podstawowe definicje w logice które już znasz obejmują pojęcia takie jak: zdania w sensie logicznym, niesprzeczność (wewnętrzna zgodność systemu), implikacja (relacja między wyrażeniami zdaniowymi), koniunkcja i alternatywa (spójniki) oraz kwantyfikatory (ogólny sposób wyrażania "istnieje" lub "dla każdego"). Definicje te są fundamentem dla dalszej analizy i dowodzenia twierdzeń w ramach logiki formalnej, teorii zbiorów czy logiki matematycznej. Tu natomiast dowiesz się jeszcze jak poprawnie tworzyć definicje, na jakie kategorie możemy je podzielić, dlaczego ich tworzenie nie jest takie łatwe jak się może wydawać, oraz czym jest DEFINIENDUM i DEFINIENS.

8.2 Czas na teorię

Aby móc przećwiczyć umiejętność definiowania musimy najpierw zrozumieć co i jak definiujemy. Definiowanie może mieć dwa znaczenia:

1. Definiowanie rzeczy, czyli Definicja Realna, dotyczy świata. Innymi słowy odpowiadamy na pytanie "Czym rzecz jest?".

2. Definiowanie słów, czyli Definicja Nominalna, dotyczy języka. Innymi słowy odpowiadamy na pytanie "Jakie jest znaczenie wyrazu?".

Skoro już znamy dwa podstawowe typy definiowania, czas poznać rodzaje definicji:

1. Definicja równościowa, czyli definicje jakie często możemy znaleźć w matematyce i nie tylko. Składa się z tych samych części co definicja klasyczna, a wygląda następująco: $a^2+b^2 = c^2$, gdzie "a^2+b^2"to DEFINIENDUM, "="to spójnik, a "c^2"to DEFINIENS.

2. Definicja klasyczna, czyli najczęściej przez nas wykorzystywany sposób definiowania. Składa się ona z DEFINIENDUM(to co chcemy zdefiniować), spójnika definicyjnego o charakterze równości (np. to), DEFINIENS (człon definiujący, to za pomocą czego definiujemy). Przykładem takiej definicji jest:
"Kij"(DEFINIENDUM) "to"(spójnik) "drewniana lub metalowa laska o specjalnym kształcie, używana do gier sportowych"(DEFINIENS).

3. Definicja nieklasyczna, sposób wyjaśniania pojęć, który nie bazuje na tradycyjnym rozumieniu definicji klasycznych. Klasyczna definicja to taka, która wyznacza pojęcie przez podanie jego cech koniecznych i wystarczających (np. "człowiek to istota rozumna, która chodzi na dwóch nogach"). W definicji nieklasycznej zamiast tego stawia się na inne podejścia do wyjaśniania znaczenia pojęć.

   Może to obejmować:

   (a) Definicje kontekstowe, pojęcie jest definiowane przez kontekst, w jakim jest używane,
   (b) Definicje operacyjne, wyjaśnienie pojęcia odbywa się poprzez wskazanie procedury lub czynności, które je tworzą,
   (c) Definicje indukcyjne, pojęcie może być definiowane w sposób, który wprowadza nowe elementy w miarę rozwoju rozumienia, bez konieczności podawania stałych cech.

4. Definicja nominalna to sposób określenia znaczenia pojęcia poprzez wskazanie jego nazw lub etykiet, bez odnoszenia się do jego cech czy właściwości. Mamy trzy rodzaje takich definicji:

   (a) Sprawozdawcza, określająca co wyraz aktualnie znaczy,
   (b) Projektująca, ustala nowe znaczenie wyrazu,

(c) Regulująca, poprawiamy znaczenie wyrazu(np.młody),

(d) Konstrukcyjna, wyjaśniamy jego sposób konstrukcji lub tworzenia z innych elementów.

5. Definicja przez abstrakcję, metoda definiowania pojęć, w której wyodrębnia się cechy wspólne dla różnych zjawisk, ignorując szczegóły nieistotne lub różnice między nimi. Celem jest stworzenie pojęcia bardziej ogólnego, które obejmuje różne przypadki, traktując je w sposób abstrakcyjny. Na przykład, pojęcie "zwierzę"może zostać zdefiniowane przez abstrakcję, zbierając wspólne cechy różnych zwierząt, takie jak bycie organizmem żywym, zdolność do poruszania się, oddychania, itd., ignorując szczegóły dotyczące poszczególnych gatunków.

8.3 Kiedy definicja jest poprawna?

Definicja jest poprawna gdy spełnia podane warunki:

1. Powinna podawać istotne cechy gatunków
2. Nie powinna być za szeroka ani za wąska (ma zachodzić równość między DEFINIENDUM i DEFINIENSEM)
3. Nie może być kolista (nie zawiera błędnego koła)
4. Definicja nie może być czysto negatywna

8.4 Dwa warunki szczególnie bliskie sercu logika

Oprócz wymienionych wyżej warunków poprawności definicji klasycznej, dla definicji nominalnej, pełniącej zasadnicza role w logice czy matematyce, formułuje następujące się dwa warunki formalnej poprawności definicji::

1. Warunek przekładalności, definicja "przechodzi w obie strony", tzn. DEFINIENDUM ma to samo znaczenie/wartość logiczną, co DEFINIENS.
2. Warunek niesprzeczności głoszący, że jeśli system jest niesprzeczny, a to po dołączeniu do niego definicji nadal pozostaje niesprzeczny. Oznacza to, że jeśli w naszym systemie mamy definicję A i do tego systemu dodamy definicję B, to uzyskujemy wyrażenie $A \wedge B$, co jest poprawne. Jednakże, jeśli do tego systemu teraz dodamy definicję $\neg A$, otrzymamy wyrażenie $A \wedge \neg A$, co jest sprzeczne, ponieważ prowadzi do logicznego błędu wewnątrz naszego systemu.

8.5 Warunki formalnej poprawności definicji

Ostatnimi warunkami, które musimy poznać, są warunki formalnej poprawności definicji w systemie logicznym:

1. Warunek najogólniejszego kontekstu dla definiendum
2. Warunek unikania błędnego koła, w definiensie nie może być definiendum
3. Warunek jednorodności, każda zmienna wolna po jednej stroni definicji musi być wolna po drugiej stronie, czyli nie może być zmieniana ani wprowadzana w nowe znaczenia, aby uniknąć niejednoznaczności i zapewnić spójność w definicji

8.6 Style definicji

Podczas tworzenia definicji musimy zdecydować się na jeden z stylów, czyli jak ma ona wyglądać.

1. Styl semantyczny - koncentruje się na znaczeniu słów i wyrażeń. W tym stylu zwraca się uwagę na to, jak różne konteksty wpływają na interpretację treści.

2. Styl słownikowy - najprostsza forma definicji, która polega na podaniu znaczenia słowa, często poprzez wskazanie jego synonimów lub przybliżenia znaczenia w prostych słowach. Jest to definicja, którą znajdziemy w słownikach.

3. Styl przedmiotowy - polega na wskazaniu rzeczywistego przedmiotu lub przykładu, który ilustruje definicję. Celem jest ukazanie, jak pojęcie funkcjonuje w rzeczywistości, a nie tylko teoretyczne opisanie jego cech.

8.7 Zadania

1. Poniższe definicje są błędne, popraw je:

a) Słoń to mały, szybki ssak żyjący w wodzie, znany z umiejętności latania.

b) Dynamika to gałąź nauki zajmująca się badaniem, jak ciała nigdy nie poruszają się, ignorując wpływ sił.

c) Równowaga to stan, w którym siły działające na obiekt są skrajnie nierównoważone, co prowadzi do chaosu i nieprzewidywalności.

d) Fotosynteza to proces, w którym rośliny absorbują zanieczyszczenia i wydzielają toksyny, nie produkując tlenu.

e) Demokracja to forma rządów, w której władza należy wyłącznie do jednej osoby, a lud ma wpływu na decyzje rządu.

f) Ekosystem to miejsce, gdzie wszystkie organizmy żyją razem, a ich interakcje są całkowicie nieistotne.

g) Komputery to różnej wielkości narzędzia.

h) Sztuka to forma ekspresji, która ma na celu jedynie szokowanie ludzi i wywoływanie negatywnych emocji, bez wartości estetycznych.

2. Sprawdź czy poniższe definicje są poprawne, jeśli zaś nie są poprawne, powiedz dla czego to powiedz dlaczego:

a) Funktor jest to wyrażenie, które wraz z innymi wyrażeniami,zwanymi jego argumentami, tworzy wyrażenie złożone.

   Odp: Definicja jest poprawna bo spełnia wszystkie warunki definicji.

b) Koniunkcja dwóch zdań A i B jest zdaniem, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania A i B tworzą koniunkcję.

   Odp: Definicja jest błędna, błąd polega na kolistości definicji.

c) Równoważność dwóch zdań A i B jest zdaniem, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania istnieją.

   Odp: Definicja jest błędna, błąd polega na tym, że definicja jest za szeroka.

d) Smartfon, to urządzenie elektroniczne, które nie jest tradycyjnym telefonem stacjonarnym, nie jest prostym aparatem służącym jedynie do wykonywania połączeń głosowych.

   Odp: Definicja jest błędna, błąd polega na tym, że definicja czysto negatywna.

e) Kierunek studiów to, wydział wyższej uczelni zajmujący się daną nauką.

f) Konkurs, możemy wyjaśnić w następujący sposób: postępowanie mające na celu wybranie najlepszego uczestnika ze względu na jakieś umiejętności lub inne czynniki.

g) Dwa wyrażenia należą do tej samej kategorii składniowej, gdy po zastąpieniu jednego z tych wyrażeń przez drugie, dowolne wyrażenie zdaniowe zawierające wyrażenie zastępowane, po zastąpieniu pozostaje wyrażeniem zdaniowym.

h) Kot to zwierzę domowe o miękkiej sierści, długim ogonie, długich wąsach, łapach zakończonych pazurami, mające cztery kończyny, jedną głowę, dwanaście wąsów i jedną parę oczu.

i) Liczba całkowita n jest parzysta, jeśli istnieje liczba całkowita k, taka że n=2k oraz k jest liczbą całkowitą.

j) Pszczoła jest owadem, który jest potrzebny kwiatom do przetrwania i rozmnażania się co z kolei powoduje powstawanie jabłek.

k) Nauczycielem jest każdy, kto pracuje w szkole.

l) Telewizor to urządzenie elektroniczne z czarnym ekranem.

m) Wieloryb jest to ssak chodzący.

n) X jest makiem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest kwiatem o czerwonych płatkach.

o) Kolor to relacja różnobarwności obiektów materialnych.

p) A jest wnukiem B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje C takie, że C jest ojcem A i synem B.

r) Student piszący to zdanie jest sobą wtedy i tylko wtedy gdy skończy pisać.

3. Stwórz definicję regulującą dla:

a) Wysoki mężczyzna

   Odp: Wysoki mężczyzna to człowiek płci męskiej o wzroście powyżej 170 cm.

b) Bogaty człowiek

c) Jest słabym studentem

d) Długa podróż

e) Jechać z nadmierną prędkością

f) Jest uzależniony od alkoholu

g) Jest wysoko w rankingu

h) Student dużo pisze

i) Chuda kobieta

j) Mała wieś

k) Duże miasto

l) Szybki biegacz

4. Stwórz definicję sprawozdawczą dla:

a) Brat stryjeczny

   Odp: Brat stryjeczny jest to kuzyn.

b) Metal szlachetny

c) Budzik

d) Komputer

e) Trójkąt prostokątny

f) Hotel

g) Zamek

h) Pociąg towarowy

i) Państwo

j) Klucz francuski

k) Nauczyciel akademicki

5. Podaj przykład definicji:

a) regulującej, nominalnej

Odp: Książka to zbiór kart (stron) połączonych razem, zawierających tekst lub obrazy, które są przeznaczone do czytania i przekazywania wiedzy lub rozrywki.

b) równościowej przez abstrakcję w stylizacji semantycznej

Odp: Kwiat to część rośliny, która służy do rozmnażania, charakteryzująca się często barwnymi płatkami i zapachem, przyciągająca owady zapylające.

c) konstrukcyjnej, kontekstowej w stylizacji słownikowej

d) sprawozdawczej, klasycznej w stylizacji przedmiotowej

e) normalnej, nieklasycznej w stylizacji semantycznej

6. Opisz poniższe definicje:

a) Drzewo to roślina wieloletnia o zdrewniałym pniu, która wytwarza liście i gałęzie, a jej wysokość przekracza 2 metry.

Odp: definicja realna, definicja klasyczna, styl przedmiotowy

b) Komputer to urządzenie elektroniczne zdolne do przetwarzania danych oraz wykonywania obliczeń na podstawie zdefiniowanych instrukcji.

Odp: definicja realna, definicja równościowa, styl semantyczny

c) Woda to substancja chemiczna składająca się z dwóch atomów wodoru i jednego atomu tlenu, występująca w stanie ciekłym w temperaturze pokojowej.

d) Kot to mały ssak drapieżny z rodziny felidów, znany z niezależności i zdolności do polowania.

e) Uczucie to subiektywne doświadczenie emocjonalne, które może być pozytywne lub negatywne, wpływające na nasze zachowanie.

f) Rower to pojazd dwukołowy napędzany siłą mięśni, który porusza się na dwóch kołach.

g) Książka to zbiór zapisanych lub drukowanych stron, które są połączone razem i zawierają tekst oraz ilustracje.

h) Muzyka to sztuka organizacji dźwięków w czasie, mająca na celu wywołanie emocji i reakcji u słuchaczy.

i) Internet to globalna sieć komputerowa, która umożliwia komunikację oraz wymianę danych między użytkownikami.

j) Sport to forma aktywności fizycznej, która odbywa się według określonych zasad i często ma charakter rywalizacyjny.

k) Motyl to owad z rzędu Lepidoptera, charakteryzujący się dużymi, kolorowymi skrzydłami, który przechodzi przez etap poczwarki w swoim cyklu życia.

l) Energia to zdolność systemu do wykonania pracy, która może występować w różnych formach, takich jak kinetyczna, potencjalna czy cieplna.

9. Odpowiedzi do zadań

9.1 Klasyczny rachunek zdań (KRZ)

Zadanie 1

f)
$$(p \wedge q) \to r$$

g)
$$(p \wedge q) \to r$$

h)
$$p \to q$$

i)
$$p \equiv (q \wedge r)$$

j)
$$(p \equiv q) \to (r \vee s)$$

k)
$$p \to q \wedge r$$

l)
$$(p \to q) \equiv (r \wedge s)$$

Zadanie 2

b) Fałszywe, gdy p jest 1 i q jest 0.

c) Fałszywe, gdy $\neg p$ jest 1 i $\neg q$ jest 0.

e) Fałszywe, gdy alternatywa jest prawdziwa a koniunkcja fałszywa, czyli gdy przynajmniej p lub q jest prawdziwe i przynajmniej r lub s jest fałszywe.

f) Fałszywe, gdy oba człony koniunkcji są prawdą, a implikowane wyrażenie jest fałszywe.

g) Fałszywe, gdy oba człony koniunkcji są prawdą, a implikowane wyrażenie jest fałszywe.

h) Fałszywe, gdy implikowane wyrażenie jest fałszywe.

i) Fałszywe, gdy człony równoważności mają różne wartości logiczne.

j) Fałszywe, gdy równoważność będzie prawdziwa a alternatywa fałszywa.

l) Fałszywe, gdy oba człony równoważności będą miały różne wartości.

Zadanie 3

d)

(1)	$p \equiv q$	zał.
(2)	$p \to q$	OE: 1
(3)	$q \to p$	OE: 1
(4)	$\neg q \to \neg p$	Transp: 2
(5)	$\neg p \to \neg q$	Transp: 3
	$\neg q \equiv \neg p$	DE: 4,5

e)

(1)	$p \to q$	zał.
	$\neg q \to \neg p$	Trans: 1

f)

(1)	$(p \to q) \wedge p$	zał.
(2)	$p \to q$	OK:1
(3)	p	OK:1
	q	RO:2,3

g) To nie jest prawo logiki.
h)

(1)	$p \to q$	zał.
(2)	$q \to r$	zał.
(3)	$p \to r$	SH: 1,2

Zadanie 4

a) Sprzeczność - p i $\neg p$

b) Sprzeczność - $(p \vee q)$ i $\neg(p \vee q)$

Zadanie 5

a) Jest prawem logiki.
b) Jest prawem logiki.
c) Jest prawem logiki.
d) Nie jest prawem logiki

Zadanie 6

Warto zaznaczyć, że poniższe odpowiedzi mogą się różnić od Twoich — to nic złego. Ten sam dowód można przedstawić na różne sposoby. Najważniejszy jest sposób rozumowania.

a) $p \wedge s$
b) $r \to s$
c) $\neg(\neg p \to s) \wedge s$
d) To jest twierdzenie De Morgana, więc musisz dodać założenie które nie doprowadzi do sprzeczności, np. $p \to p$.
e) $p \wedge q \wedge s \wedge q \wedge l$
f) $g \wedge s$

Zadanie 7

a) Twierdzenie jest tautologią.
b) Twierdzenie jest tautologią.
c) Twierdzenie jest tautologią.
d) Twierdzenie jest tautologią.
e) Twierdzenie jest tautologią.
f) Twierdzenie jest tautologią.
g) Twierdzenie nie jest tautologią.

Zadania dodatkowe z KRZ

Zadanie 1

a) Twierdzenie jest prawdziwe.
b) Twierdzenie nie jest prawdziwe.
c) Twierdzenie jest prawdziwe.
d) Twierdzenie jest prawdziwe.
e) Twierdzenie nie jest prawdziwe.
f) Twierdzenie jest prawdziwe.
g) Twierdzenie jest prawdziwe.
h) Twierdzenie nie jest prawdziwe.
i) Twierdzenie jest prawdziwe.
j) Twierdzenie jest prawdziwe.
k) Twierdzenie nie jest prawdziwe.
l) Twierdzenie nie jest prawdziwe.

Zadanie 2

a)

p	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	q	$p \to q$	$(p \wedge \neg r) \wedge (p \to q)$	$q \to r$	$((p \wedge \neg r) \wedge (p \to q)) \wedge (p \to r)$
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0

b) Układ sprzeczny
c) Układ sprzeczny
d) Układ sprzeczny
e) Układ sprzeczny
f) Układ sprzeczny

Zadanie 3

a) To nie jest prawo logiki
b) To nie jest prawo logiki
c) To jest prawo logiki
d) To nie jest prawo logiki
e) To jest prawo logiki
f) To nie jest prawo logiki

Zadanie 4

a) Zdanie jest sprzeczne, to nie jest prawo logiki.
b) Zdanie nie jest sprzeczne, to jest prawo logiki.
c) Zdanie jest sprzeczne, to nie jest prawo logiki.
d) Zdanie nie jest sprzeczne, to jest prawo logiki.
e) Zdanie jest sprzeczne, to nie jest prawo logiki.

Zadanie 5

a) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
b) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
c) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.
d) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.
e) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.
f) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
g) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
h) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
i) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.
j) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.
k) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
l) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.
m) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
n) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
o) Rozumowanie poprawne, to jest prawo logiki.
p) Rozumowanie niepoprawne, to nie jest prawo logiki.

Zadanie 6

a) To jest prawo logiki
b) To jest prawo logiki
c) To nie jest prawo logiki
d) To nie jest prawo logiki

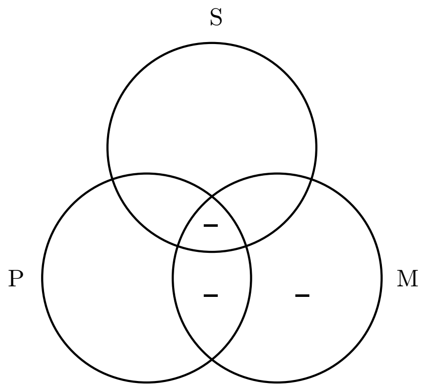
e) To jest prawo logiki
f) To nie jest prawo logiki

9.2 Teoria zdań kategorycznych

Zadanie 1

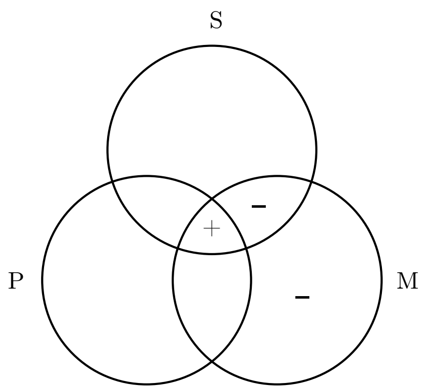
d) I. Felapton II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej.

III.



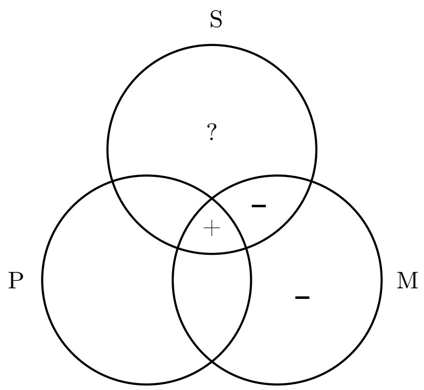
e) I. Darii II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej

III.



f) I. Tryb błędny II. Tryb nie spełnia warunku I 3.

III.



g) I. Camenes II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej
h) I. Celaront II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej
i) I. Bocardo II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej

j) I. Tryb błędny II. Tryb nie spełnia warunku II 1.
k) I. Dimatis II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej
l) I. Bamalip II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej
m) I. Barbari II. Tryb spełnia wszystkie warunki formalnej
n) I. Tryb błędny II. Tryb nie spełnia warunku II 1.
o) I. Darapti II. Tryb nie spełnia warunku

Zadanie 2

d) Wniosek: Niektóre nadmorskie miejscowości są turystyczne. - Camestres
e) Wniosek: Żaden królik nie jest malarzem. - Camenes
f) Wniosek: Niektóre motorowery nie są samochodami. - Baroco
g) Wniosek: Żaden logik nie jest fanem teorii spiskowych. - Cesare
h) Wniosek: Niektórzy ludzie nie lubią słońca. - Ferio
i) Wniosek: Niektóre ptaki nie latają. - Felapton
k) Wniosek: Niektórzy elokwentni ludzie są nauczycielami. - Dimatis
j) Wniosek: Niektóre figury równoboczne nie są kwadratami. - Fresison
l) Wniosek: Niektóre maszyny są szybkie. - Disamis
m) Wniosek: Niektóre dalmatyńczyki nie jedzą czekolade. - Ferison
n) Wniosek: Niektórzy miłośnicy logiki posiadają legitymację studencką. - Darapti
o) Wniosek: Żaden monter gazowy nie zostawia włączonego żelazka. - Celarent

Zadanie 3

d) Wnioskowanie poprawne - Darii.
e) Wnioskowanie poprawne - Festino.
f) Wnioskowanie niepoprawne.
g) Wnioskowanie poprawne - Dimatis
h) Wnioskowanie niepoprawne.
i) Wnioskowanie poprawne - Baroco.
j) Wnioskowanie poprawne - Camestres.
k) Wnioskowanie poprawne - Cesare.
l) Wnioskowanie niepoprawne.
m) Wnioskowanie poprawne - Ferio
n) Wnioskowanie poprawne - Bocardo.
o) Wnioskowanie poprawne - Felapton

Zadanie 4

c) Wniosek: Żaden ptak w tej klatce nie żywi się suszonym bananem.
d) Wniosek: Wszystkie romanse w tej bibliotece są dobrze napisane.
e) Wniosek: Twoje wiersze nie są interesujące.
f) Wniosek: Szekspir był mądry.
g) Wniosek: Wszyscy moi przyjaciele jadają przy niskim stole.
h) Wniosek: Żaden kot z zielonymi oczami, nie będzie bawił się z gorylem.
i) Wniosek: Osły nie są łatwe do okiełznania.
j) Wniosek: Wszystkie zwierzęta na podwórku gryzą kości.
k) Wniosek: Żadna ciężka ryba nie jest nieprzyjazna dla dzieci.
l) Wniosek: Deszczowe dni są zawsze pochmurne.
m) Wniosek: Jan Wiśniewski lubi zimną wołowinę.
n) Wniosek: Nie mogę przeczytać żadnego z listów Kowalskiego.
o) Wniosek: Zawsze unikam kangurów.

Zadanie 5

d) Wniosek: $A\ a\ –B$, czyli $A\ e\ B$
e) Wniosek: $D\ a\ –C$, czyli $D\ e\ C$

f) Wniosek: $D\ e\ E$
g) Wniosek: $A\ a$ –D, czyli $A\ e\ D$
h) Wniosek: $A\ e\ C$
i) Wniosek: $C\ e\ H$
j) Wniosek: –$B\ e\ A$, czyli $A\ a\ B$
k) Wniosek: $A\ e\ E$
l) Wniosek: $E\ a\ C$
m) Wniosek: $E\ a\ D$
n) Wniosek: –$L\ e\ A$, czyli $A\ a\ L$
o) Wniosek: $K\ a\ B$

9.3 Rachunek zbiorów i relacji

Zadanie 1

d) $C - B$ Odp: Trójkąty równoramienne nie równoboczne.
e) $A \cup C$ Odp: Trójkąty prostokątne i trójkąty równoramienne.
f) $B - A$ Odp: Trójkąty równoboczne nie prostokątne.
g) $B \in C$ Odp: Trójkąty równoboczne będące trójkątami równoramiennymi.
h) $C \cap A$ Odp: Trójkąty równoramienne prostokątne.
i) $C - A$ Odp: Trójkąty równoramienne nie prostokątne.
j) $C \cup A$ Odp: Trójkąty równoramienne i prostokątne.

Zadanie 4

b) A = {a, b}, B = {a, c, d}

Nie zachodzi inkluzja $B \subset A$, ponieważ istnieje element w B, który nie należy do A. Konkretnie, $c \in B$, ale $c \notin A$, więc warunek inkluzji nie jest spełniony.

c) A = ∅, B = {a, b, c}

Nie zachodzi inkluzja $B \subset A$, ponieważ zbiór pusty $\emptyset$ nie zawiera żadnych elementów, a B zawiera elementy a, b, c. Z definicji inkluzji, dla każdego $x \in B$ musiałoby zachodzić $x \in A$, co nie jest spełnione.

d) A = {{a}, a, ∅}, B = {a}

Nie zachodzi inkluzja $B \subset A$, ponieważ $a \in B$, ale $a \notin A$ w sensie zbiorowym. W A znajdują się elementy $\{a\}, a$ i $\emptyset$ jako osobne byty, ale niekoniecznie a jako taki, jeśli traktujemy go jako zwykły element, a nie zbiór.

Zadanie 5

a) $\{b, c\} = \{b, c, d\} \Rightarrow d = b$ lub $d = c$.

b) $\{a, b, a\} = \{a, b\}$ – prawdziwe zawsze, ponieważ zbiór nie uwzględnia powtórzeń.

c) $\{\{a, b\}, a\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow a = \{c\}$ oraz $\{a, b\} = \{c, d\}$, czyli $a = c$ i $b = d$.

Zadanie 6

b) Twierdzenie prawdziwe.
c) Twierdzenie nieprawdziwe.
d) Twierdzenie prawdziwe.
e) Twierdzenie prawdziwe.
f) Twierdzenie prawdziwe.
g) Twierdzenie prawdziwe.
h) Twierdzenie nieprawdziwe.
i) Twierdzenie nieprawdziwe.
j) Twierdzenie prawdziwe.

Zadanie 7

b)

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{aligned}
x \in A - (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B - C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

c)

$$(A - B) \cup C = [(A \cup C) - B] \cup (B \cap C)$$

$$\begin{aligned}
x \in (A - B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \notin B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \wedge x \notin B \vee x \in B \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow x \in [(A \cup C) - B] \cup (B \cap C)
\end{aligned}$$

d)

$$(A \cup B) = (-A \cap -B)$$

$$\begin{aligned}
x \in -(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in (-A) \wedge x \in (-B) \\
&\Leftrightarrow x \in (-A \cap -B)
\end{aligned}$$

e)

$$(A \cap B) = (-A \cup -B)$$

$$\begin{aligned}
x \in -(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \\
&\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in (-A) \vee x \in (-B) \\
&\Leftrightarrow x \in (-A \cup -B)
\end{aligned}$$

Zadanie 8

d) Nie jest prawdą, mogą istnieć elementy B, które nie są w A.

e) Prawdziwe.

f) Poprawne.

g) Poprawne.

Zadanie 9

b) Bycia babcią, Przykład: $x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy$, Dziedzina: zbiór kobiet, które mają wnuki.

c) Bycia uczniem, Przykład: $x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy$, Dziedzina: zbiór osób, które się uczą.

d) Bycia podzbiorem, Przykład: $x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy$, Dziedzina: zbiór wszystkich zbiorów.

e) Wynikania logicznego, Przykład: $x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy$, Dziedzina: zbiór zdań logicznych (formuł logicznych).

Zadanie 10

c) Bycie starszym Odp: niezwrotna, asymetryczna, przechodnia.

d) Bycie rówieśnikiem Odp: zwrotna, symetryczna, przechodnia.

e) Bycie młodszą siostrą Odp: nieprzechodnia, niezwrotna, asymetryczna.

f) Bycie bratową Odp: nieprzechodnia, niezwrotna, asymetryczna.

g) Zawieranie się zbiorów Odp: przechodnia, niezwrotna, asymetryczna.

Zadanie 11

a) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest starszy od $y\}$

b) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest młodszy od $y\}$

c) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ i y są rówieśnikami$\}$

d) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ nie jest młodszy od $y\}$

e) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ nie jest starszy od $y\}$

f) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest wyższy od $y\}$

g) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ i y mają ten sam wzrost$\}$

h) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest bratem $y\}$

i) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest ojcem $y\}$

j) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest mężem $y\}$

k) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest matką $y\}$

l) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest wnukiem $y\}$

m) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest przełożonym $y\}$

n) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest opiekunem $y\}$

o) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ i y należą do tej samej partii politycznej$\}$

p) Dziedzina: ludzie, Przeciwdziedzina: ludzie, Pole: $\{(x, y) \mid x$ i y wyznają tę samą religię$\}$

q) Dziedzina: proste, Przeciwdziedzina: proste, Pole: $\{(x, y) \mid x$ i y są równoległe$\}$

r) Dziedzina: proste, Przeciwdziedzina: proste, Pole: $\{(x, y) \mid x$ i y są prostopadłe$\}$

s) Dziedzina: liczby całkowite, Przeciwdziedzina: liczby całkowite, Pole: $\{(x, y) \mid x$ dzieli $y\}$

t) Dziedzina: liczby rzeczywiste, Przeciwdziedzina: liczby rzeczywiste, Pole: $\{(x, y) \mid x > y\}$

u) Dziedzina: liczby rzeczywiste, Przeciwdziedzina: liczby rzeczywiste, Pole: $\{(x, y) \mid x \leq y\}$

v) Dziedzina: liczby naturalne, Przeciwdziedzina: liczby naturalne, Pole: $\{(x, y) \mid x$ jest trzykrotnością $y\}$

w) Dziedzina: zbiory, Przeciwdziedzina: zbiory, Pole: $\{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$

x) Dziedzina: zbiory, Przeciwdziedzina: zbiory, Pole: $\{(X, Y) \mid X \subset Y\}$

y) Dziedzina: zdania logiczne, Przeciwdziedzina: zdania logiczne, Pole: $\{(p, q) \mid p \Rightarrow q\}$

Zadanie 12

b) Niesprzeczny

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}$$

c) Sprzeczny

d) Niesprzeczny

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1\}$$

e) Niesprzeczny

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{3\}$$

f) Niesprzeczny

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{3\}$$

g) Sprzeczny

h) Niesprzeczny

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1, 2, 3\}$$

i) Sprzeczny

j) Sprzeczny

k) Niesprzeczny

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1, 2\}$$

Zadanie 13

b) Iloczyn względny bycia matką i bycia matką:

$$\{(x, z) \mid \exists y\, (x \text{ jest matką } y \text{ i } y \text{ jest matką } z)\}$$

c) Iloczyn względny bycia dzieckiem i bycia dzieckiem:

$$\{(x, z) \mid \exists y\, (x \text{ jest dzieckiem } y \text{ i } y \text{ jest dzieckiem } z)\}$$

d) Iloczyn względny bycia żoną i bycia synem:

$$\emptyset$$

e) Iloczyn względny bycia mężem i bycia córką:

$$\emptyset$$

f) Iloczyn względny bycia ojcem i bycia mężem:

$$\{(x, z) \mid \exists y\, (x \text{ jest ojcem } y \text{ i } y \text{ jest mężem } z)\}$$

g) Iloczyn względny bycia ojcem i bycia żoną:

$$\emptyset$$

h) Niezwrotna i asymetryczna: Możliwe (przykład: relacja „bycia ojcem", ponieważ nikt nie jest swoim własnym ojcem i relacja nie jest symetryczna).

i) Niezwrotna i przechodnia: Możliwe (przykład: relacja „bycia przodkiem", ponieważ nikt nie jest swoim własnym przodkiem, ale jeśli x jest przodkiem y, a y jest przodkiem z, to x jest przodkiem z).

j) Niespójna i przechodnia: Możliwe (przykład: relacja „bycia dziadkiem", ponieważ nie każda para osób jest w tej relacji, ale jeśli x jest dziadkiem y i y jest dziadkiem z, to x jest pradziadkiem z).

k) Spójna i przechodnia: Możliwe (przykład: relacja „bycia większym lub równym" ($\geq$), ponieważ każda para liczb jest porównywalna, a jeśli $x \geq y$ i $y \geq z$, to $x \geq z$).

l) Równoważnościowa i porządkująca częściowo zbiór A: Niemożliwe (relacja równoważnościowa dzieli zbiór na klasy abstrakcji, ale częściowy porządek wymaga, aby elementy były w relacji uporządkowanej).

m) Równoważnościowa i porządkująca liniowo zbiór A: Niemożliwe (relacja równoważnościowa grupuje elementy w klasy, ale nie ustala ich porządku liniowego).

9.4 Węższy rachunek predykatów (WRP)

Zadanie 1

e) $\forall x(S(x) \rightarrow W(x))$

$f)\ \forall x(P(x) \rightarrow \sim R(x))$

$g)\ \forall x(Pr(x) \rightarrow D(x))$

$h)\ \forall x(M(x) \rightarrow (\sim U(x) \wedge \sim B(x)))$

$i)\ \exists x(A(x) \wedge T(x))$

$j)\ \forall x(N(x) \rightarrow M(x))$

$k)\ \forall x(A(x) \rightarrow \exists y(B(x) \wedge R(x,y)))$

$l)\ \sim \forall x(U(x) \rightarrow Z(x))$

$m)\ \exists x(S(x) \wedge \sim J(x))$

$n)\ \exists x(L(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow D(x,y)))$

$o)\ \forall x(S(x) \rightarrow W(x,j))$, gdzie j - "Jan"

p) $\forall x\,[C(x) \rightarrow (\exists y\,(P(y) \wedge P(x,y)) \rightarrow \exists z\,(Z(z) \wedge P(x,z)))]$

$r)\ \forall x\,(C(x) \rightarrow (\exists y\,(K(y) \wedge P(y,x)) \rightarrow S(x)))$

Zadanie 2

d) To jest prawo logiki.

e) To jest prawo logiki.

f) To jest prawo logiki.

g) To nie jest prawo logiki.

h) To jest prawo logiki.

i) To jest prawo logiki.

j) To nie jest prawo logiki.

k) To nie jest prawo logiki.

l) To jest prawo logiki.

m) To jest prawo logiki.

n) To jest prawo logiki.

o) To jest prawo logiki.

p) To nie jest prawo logiki.

Zadanie 3

d) np. Każdy człowiek nie jest krokodylem. Wszystkie zwierzęta nie są roślinożerne.

e) np. Istnieje taki człowiek, który zna wszystkich innych ludzi. Jest ktoś, kto zna wszystkie języki.

f) np. Jest ktoś, kto jest nauczycielem, ale nie jest dyrektorem. Istnieje osoba, która jest studentem, ale nie jest nauczycielem.

g) np. Istnieje ktoś, kto jest artystą, ale nie jest muzykiem, oraz ktoś, kto jest artystą i jest muzykiem. Jest ktoś, kto jest lekarzem, ale nie jest chirurgiem, oraz ktoś, kto jest lekarzem i jest chirurgiem.

h) np. Jest osoba, która jest inżynierem, a ktoś inny jest doktorem, ale nie współpracują ze sobą. Człowiek i krokodyl nie lubią się.

i) np. Jest ktoś, kto jest muzykiem, ale nie jest wokalistą, a każdy, kto śpiewa, współpracuje z tą osobą. Jest ktoś, kto jest lekarzem, ale nie jest chirurgiem, a każdy pacjent tej osoby wchodzi w odpowiednie leczenie.

j) np. Każdy nauczyciel, który nie jest dyrektorem, ma ucznia, który nie jest jego wychowawcą. Każdy pracownik, który nie jest menedżerem, ma współpracownika, z którym nie współpracuje.

k) np. Każdy student ma wykładowcę, który prowadzi zajęcia z danej dziedziny. Każdy pracownik ma kolegę z pracy, z którym współpracuje.

l) np. Każdy pisarz, który nie jest poetą, ma przyjaciela, który nie jest jego mentorem. Każdy artysta, który nie jest malarzem, ma współpracownika, który nie jest jego konkurentem.

m) np. Jest ktoś, kto jest nauczycielem i dla każdej osoby, którą naucza, nie jest ona jego przyjacielem. Istnieje sportowiec, który nie ma żadnego z rywali, z którym jest w przyjaźni.

n) np. Nie ma nikogo, kto jest rzeźbiarzem, a żadna jego praca nie jest oceniana przez innych artystów. Nie istnieje pisarz, którego książki nie są doceniane przez żadnego innego autora.

o) np. Nie ma nikogo, kto jest aktorem, a wszyscy jego koledzy nie oglądają jego filmów. Nie istnieje malarz, którego obrazy nie są podziwiane przez żadnego innego artystę.

Zadanie 4

c) Wnioskowanie niepoprawne.

d) Wnioskowanie poprawne.

e) Wnioskowanie poprawne.

f) Wnioskowanie niepoprawne.

g) Wnioskowanie niepoprawne.

h) Wnioskowanie poprawne - Barbara.

i) Wnioskowanie poprawne.

j) Wnioskowanie niepoprawne.

k) Wnioskowanie poprawne.

l) Wnioskowanie poprawne - Ferison.

m) Wnioskowanie niepoprawne.

n) Wnioskowanie poprawne.

o) Wnioskowanie poprawne.

Zadanie 5

c) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

d) $\exists y (L(y) \wedge \forall x (L(x) \rightarrow y \leq x))$

e) $\sim \exists y (L(y) \wedge \forall x (L(x) \wedge x \neq y \rightarrow y > x))$

f) $\forall x \forall y \forall z (L(x) \wedge L(y) \wedge L(z) \wedge x = z \wedge y = z \rightarrow x = y)$

g) $\exists x (S(x) \wedge K(x, \text{logika}))$

h) $\forall x (S(x) \rightarrow \exists ! y (O(y, x)))$

i) $\exists x (K(x) \wedge L(x, m))$

j) $\forall x \, (N(x) \rightarrow \exists y \, \exists z \, (U(y) \wedge U(z) \wedge T(x, y) \wedge T(x, z) \wedge y \neq z))$

k) $\forall x \, (N(x) \rightarrow (x > 0 \vee x < 0))$

l) $\exists ! x (N(x) \wedge P(x) \wedge x = 2)$

m) $\forall x \exists y (y > x)$

n) $\exists x (I(x) \wedge \forall y (N(y) \rightarrow x > y))$

o) $\forall x (S(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge M(y, m) \wedge M(x, m) \wedge x \neq y))$

9.5 Zagadki logiczne

Zagadka piramidy: Po kilku turach pytań i odpowiedzi, w których każda osoba pyta innych, czy widzą więcej niż 49 osób (rycerzy), osoby będą mogły ustalić, kto jest kim.

Zagadka z wyspą: 100 dni.

Zagadkowa taktowność: Wacław chce sprawić, by każda dziewczyna poczuła się wyjątkowo.

Zagadka z wrotkami: Jeśli zapytam cię, czy masz wrotki, co byś odpowiedział?

Zagadka mordercy: Gdybym zapytał cię, czy jesteś mordercą, co byś odpowiedział?

Zagadka o koszach: Zapytaj jedną osobę, co by powiedział drugi o diamentach.

Zagadka od króla: 1.Czy twój sąsiad jest zwykłym człowiekiem? 2.Czy na wyspie jest złoto?

Zagadko o przejściu przez most: 17 minut.

Zagadka o rycerzach i oszustach: A – rycerz, B – oszust.

Zagadka z mostem: 3 minuty.

Zagadka o braciach: Drugi brat odpowie "nie".

Zagadka o trzech znajomych: Edward jest prawdomówny.

Zagadka o trzech towarzyszach: Andrzej jest prawdomówny, Adrian i Jerzy kłamią.

9.6 Teoria dyskusji, błędy logiczne i semiotyczne

Zadanie 1

a) Błąd następstwa (non sequitur) — z faktu, że skutek zaszedł (ktoś stoi przed domem), nie wynika, że musiała zajść przyczyna (pies szczekał).

b) Błąd uogólnienia — na podstawie kilku obserwacji (białe łabędzie) nie można wyciągać ogólnych wniosków o wszystkich łabędziach na świecie.

c) Argumentum ad ignorantiam — brak dowodu na istnienie kosmitów nie oznacza, że na pewno nie istnieją.

d) Błąd fałszywej przyczyny — pojedynczy przypadek (znajomy bez raka) nie podważa naukowych dowodów na szkodliwość palenia.

e) Błąd następstwa (non sequitur) — to, że Jan zna przepisy, nie oznacza, że studiował prawo. Znajomość przepisów może wynikać z innych źródeł.

f) Błąd następstwa (non sequitur) — fakt, że produkt jest zdrowy, nie oznacza automatycznie, że jest ekologiczny. Zdrowie może wynikać z innych czynników.

g) Argumentum ad ignorantiam — brak naukowego dowodu na to, że medytacja wydłuża życie, nie oznacza, że z pewnością takiego wpływu nie ma.

h) Błąd uogólnienia — pojedynczy przypadek długowieczności dziadka nie upoważnia do wyciągania ogólnych wniosków o zdrowotności diety bogatej w tłuszcze zwierzęce.

i) Błąd fałszywej przyczyny — następstwo czasowe między zakazem palenia a spadkiem zachorowań na astmę nie dowodzi związku przyczynowego między tymi zjawiskami.

j) Fałszywy dylemat — przedstawienie sytuacji jako wyboru tylko między dwiema skrajnymi opcjami, podczas gdy istnieją inne możliwości poza akceptacją podwyżki i sprzeciwianiem się rozwojowi miasta.

k) Błędna analogia — uczenie się języka i jazda na rowerze to zasadniczo różne umiejętności o odmiennych mechanizmach pamięciowych, więc porównanie jest nietrafne.

Zadanie 2

- Błędy rozumowania to niepoprawne schematy logiczne (np. błędne uogólnienia, błąd następstwa).
- Chwyty erystyczne to techniki manipulacji (np. argumentum ad hominem, ad baculum), które mają wywołać emocje lub zdyskredytować przeciwnika zamiast merytorycznie obalić jego argumenty

Przykład:

- Błąd rozumowania: „Jeśli pada deszcz, ulice są mokre. Ulice są mokre, więc pada deszcz.” (błąd następstwa)
- Chwyt erystyczny: „Jak możesz mówić o ekologii, skoro sam jeździsz samochodem?” (argumentum ad hominem)

Zadanie 3

a) Argumentum ad baculum — odwołanie się do groźby („jeśli nie zagłosujecie na mnie, przestanę wspierać schronisko”).

b) Argumentum ad populum — odwołanie się do opinii większości i nacisk na emocje („każdy inteligentny człowiek tak myśli”).

c) Argumentum ad hominem — atakowanie osoby zamiast argumentów („dostałeś mandat, więc nie masz prawa mówić o uczciwości”).

d) Argumentum ad verecundiam — powołanie się na autorytet bez merytorycznego uzasadnienia („znana celebrytka popiera dietę, więc musi być dobra”).

e) Argumentum ad populum — odwołanie się do powszechnej opinii („skoro wszyscy tak twierdzą, to na pewno to prawda”).

f) Argumentum ad baculum — szantaż emocjonalny („jeśli nie popierasz reformy, to nie zależy ci na kraju”).

g) Argumentum ad hominem — atakowanie osoby ze względu na jej przeszłość polityczną („był członkiem partii, która doprowadziła kraj do kryzysu").

h) Argumentum ad personam — atakowanie osoby zamiast jej argumentów („nie był u lekarza, więc nie może mówić o służbie zdrowia").

i) Argumentum ad verecundiam — powoływanie się na autorytet i używanie specjalistycznego języka dla onieśmielenia („słynny profesor Oxford mówi w niezrozumiałym języku").

j) Argumentum ad populum — odwołanie się do opinii większości i wywieranie presji społecznej („wszyscy mądrzy rodzice tak robią").

k) Argumentum ad ignorantiam — wnioskowanie o prawdziwości tezy z braku dowodu na jej fałszywość („nie udowodniono, że substancje nie powodują raka").

l) Argumentum ad baculum — szantaż i zastraszanie („poinformuję radę nadzorczą o twoich wydatkach").

m) Argumentum ad hominem — podważanie wiarygodności poprzez wskazanie na potencjalny konflikt interesów („pracujesz dla korporacji, więc nie masz racji").

n) Argumentum ad personam — atakowanie osoby poprzez odniesienie do jej rodziny („twój dziadek był funkcjonariuszem reżimu").

o) Argumentum ad verecundiam — niewłaściwe powoływanie się na autorytet bez merytorycznego związku („Arystoteles tak powiedział, więc twoja teoria jest fałszywa").

Zadanie 4

a) Argumentum ad verecundiam — powoływanie się na niepewne źródło (film na YouTube) jako dowód naukowy. Poprawa: „Warto sprawdzić wyniki badań naukowych, zamiast opierać się na niesprawdzonych filmach.”

b) Błędne koło (petitio principii) — uzasadnianie tezy przez powtórzenie jej założeń („szef ma rację, bo jest szefem”). Poprawa: „Racja szefa powinna wynikać z merytorycznych argumentów, a nie z jego pozycji.”

c) Argumentum ad verecundiam — nierzetelne posługiwanie się argumentacją z autorytetu. Poprawa: „Einstein był autorytetem w dziedzinie fizyki, ale jego opinie ekonomiczne powinny być oceniane na podstawie merytorycznych argumentów, a nie jego sławy w innej dziedzinie."

d) Argumentum ad hominem — zamiast zwalczania tezy, atakuje się osobę ją głoszącą. Poprawa: „Oceniajmy tezę o szkodliwości fast foodów na podstawie badań naukowych, a nie indywidualnych wyborów żywieniowych profesora."

e) Argumentum ad populum — odwołanie się do powszechności przekonań jako dowodu ich słuszności. Poprawa: „Wartość programu społecznego powinna być oceniana na podstawie jego rzeczywistych skutków i założeń, a nie tylko jego popularności."

f) Fałszywy dylemat — przedstawienie sytuacji jako wyboru między dwiema skrajnościami. Poprawa: „Możemy dyskutować o różnych rozwiązaniach dotyczących palenia w miejscach publicznych, które uwzględniają zarówno zdrowie obywateli, jak i inne aspekty."

g) Błąd fałszywej przyczyny — utożsamienie następstwa czasowego zdarzeń ze związkiem przyczynowym. Poprawa: „Otrzymanie nagrody najprawdopodobniej wynikało z moich umiejętności i pracy, a nie z koloru krawata."

h) Argumentum ad ignorantiam — wnioskowanie o prawdziwości twierdzenia z niemożności udowodnienia jego fałszywości. Poprawa: „Brak dowodów na nieistnienie duchów nie jest dowodem na ich istnienie. To osoba twierdząca, że coś istnieje, powinna przedstawić dowody."

i) Błąd pochopnej generalizacji — wyprowadzenie ogólnego wniosku na podstawie kilku przykładów. Poprawa: „Dwa przypadki agresywnych rowerzystów nie pozwalają stwierdzić, że wszyscy rowerzyści są agresywni. Potrzeba więcej reprezentatywnych danych."

j) Błędna analogia — uznanie za podobne sytuacji, które faktycznie nie są do siebie podobne. Poprawa: „Relacje w firmie rządzą się innymi zasadami niż relacje rodzinne. Praca powinna być odpowiednio wynagradzana zgodnie z umową."

k) Błąd złożonego pytania — pytanie sugerujące odpowiedź, która zakłada winę. Poprawa: Należy rozdzielić pytanie na dwa: „Czy kiedykolwiek oszukiwałeś na egzaminach?" a dopiero potem ewentualnie „Czy nadal to robisz?"

l) Argumentum ad personam — bezpośredni atak na osobę przeciwnika zamiast odniesienia się do jego argumentów. Poprawa: „Niezależnie od opinii o polityku, jego argumenty dotyczące reformy podatkowej powinny być oceniane merytorycznie."

m) Argumentum ad ignorantiam — przeniesienie ciężaru dowodu, założenie winy z powodu braku dowodu niewinności. Poprawa: „Niewinność zakładamy do momentu udowodnienia winy. To oskarżyciel musi przedstawić dowody potwierdzające winę."

n) Błędna analogia — uznanie za podobne rzeczy czy sytuacji, które faktycznie nie są podobne do siebie. Poprawa: „Wychowanie dziecka jest znacznie bardziej złożonym procesem niż uprawa ogrodu. Wymaga stałej uwagi, kompleksowego podejścia, dostosowywania metod do indywidualnych potrzeb oraz uwzględnienia emocjonalnego i społecznego rozwoju, czego nie można porównać do prostej pielęgnacji roślin."

o) Argumentum ad baculum — użycie gróźb w celu wymuszenia pewnego zachowania. Poprawa: „Decyzję o poparciu ustawy powinienem podjąć na podstawie jej merytorycznej wartości, a nie w obawie przed konsekwencjami ze strony opozycji."

Zadanie 6

a) Amfibolia (wieloznaczność składniowa) — nie wiadomo czy Kowalski ma psa, czy kolega ma psa.

b) Amfibolia — nie wiadomo, czy w kratę jest garnitur, czy mężczyzna, dla którego garnitur jest przeznaczony.

c) Ekwiwokacja (wieloznaczność) — "przez" może oznaczać za pomocą teleskopu lub po drugiej stronie teleskopu.

d) Nieostry zakres nazwy — "jutro" to pojęcie o nieostrym zakresie (nie określono dokładnej godziny).

e) Niewyraźna treść nazwy — "trudna sytuacja" ma niewyraźną treść, może oznaczać wiele różnych stanów.

f) Użycie wyrażeń niezrozumiałych dla słuchacza — terminologia specjalistyczna niezrozumiała dla przeciętnego odbiorcy.

g) Niejasność myślenia — wypowiedź nie oddaje precyzyjnie myśli mówiącego.

h) Elipsa — nie określono dokładnie o jaki przedmiot chodzi.

i) Elipsa — nie określono jakie wyniki i kto jest zainteresowany.

j) Mieszanie znaczenia dosłownego z przenośnym — "głowy" użyte w znaczeniu przenośnym jako "ludzie".

k) Błąd figuralnego myślenia — absolutyzacja (niemożliwe, by ktoś zawsze mówił prawdę).

l) Przesunięcie — przypisanie uczuć przedmiotowi nieożywionemu (umowie).

m) Ekwiwokacja — "w twardej oprawie" może odnosić się do rodzaju książki lub miejsca zakupu.

n) Wieloznaczność — "zgubiliśmy" może oznaczać, że Emilia się zagubiła lub że celowo go zostawiliśmy.

o) Przesunięcie kategorialne — przypisywanie stanom emocjonalnym przyczynowości fizycznej.

p) Amfibolia (wieloznaczność składniowa) — nie wiadomo czyja to rezydencja - ambasadora czy ministra.

r) Amfibolia — nie wiadomo, czy wysokie jest oprocentowanie, czy małżeństwo jest wysokie.

s) Nieostry zakres nazwy — pojęcia "młodzi ludzie" i "coraz mniej czytają" mają nieostry zakres, nie wiadomo o jaką kategorię wiekową chodzi i jaka ilość czytania stanowi "mniej".

t) Użycie wyrażeń niezrozumiałych dla słuchacza — terminologia specjalistyczna użyta w zdaniu jest niezrozumiała dla przeciętnego odbiorcy.

u) Elipsa — nie określono dokładnie, co położono na biurku.

w) Mieszanie znaczenia dosłownego z przenośnym — pomysłowi przypisano cechy fizyczne (posiadanie nóg i możliwość przemieszczania się).

y) Przesunięcie kategorialne — komisja nie może sama siebie przegłosować, to ludzie stanowiący komisję głosują.

z) Ekwiwokacja (wieloznaczność) — "zaliczył egzamin" może oznaczać, że profesor zdał egzamin lub że uznał egzamin studenta za zaliczony.

Zadanie 8

a) Poprawa: "Musimy rozważyć różne strategie inwestycyjne dla naszej firmy, w tym częściowe inwestycje w ten projekt, które mogą zwiększyć nasze szanse na sukces przy jednoczesnym ograniczeniu ryzyka."

b) Poprawa: "Jan nie dostarczył dokumentów na czas, co może wynikać z różnych przyczyn. Warto sprawdzić, co się stało, zanim ocenimy jego sumienność."

c) Poprawa: "Uczestnicy spotkania podjęli decyzję, która została zaakceptowana przez większość osób obecnych na spotkaniu."

d) Poprawa: "Minister przedstawił strategię rozwoju, która zawierała optymistyczne prognozy odnośnie przyszłości gospodarczej."

e) Poprawa: "Kocham muzykę, ponieważ jej słuchanie wywołuje we mnie pozytywne emocje i wspomnienia."

f) Poprawa: "Nasze suplementy diety są naturalne i przeszły badania kliniczne potwierdzające ich bezpieczeństwo dla zdrowia przy stosowaniu zgodnie z zaleceniami."

g) Poprawa: "Dziesięciu lekarzy biorących udział w naszym badaniu poleca ten lek, co stanowi pewne potwierdzenie jego skuteczności w określonych przypadkach."

h) Poprawa: "Powinieneś rozważyć zakup tego urządzenia, ponieważ ma dobre parametry techniczne i pozytywne recenzje użytkowników."

i) Poprawa: "Ta ustawa budzi kontrowersje z powodu jej potencjalnych skutków. Warto dyskutować o jej zaletach i wadach, niezależnie od osobistych przekonań."

j) Poprawa: "Wielokrotnie zwracałem uwagę na problem niedostatecznego finansowania transportu publicznego, który wymaga szybkiego zwiększenia nakładów przez samorząd."

k) Poprawa: "Ten produkt kupuje coraz więcej osób, co może wynikać z różnych czynników, takich jak dobra reklama, przystępna cena lub rzeczywista jakość."

l) Poprawa: "Dyrektor firmy, siedząc przy swoim nowym biurku, rozmawiał z pracownikami działu marketingu o ich pomysłach."

m) Poprawa: "Większość studentów zdała egzamin, co może wynikać z dobrego przygotowania, efektywnych metod nauczania lub odpowiedniego poziomu trudności."

n) Poprawa: "Musimy znaleźć optymalny poziom finansowania służby zdrowia, co może wymagać zarówno pewnych zmian w podatkach, jak i reform zwiększających efektywność systemu."

o) Poprawa: "Piłkarze naszej drużyny nie wygrali meczu, co mogło wynikać z wielu czynników, takich jak dobra gra przeciwnika, zmęczenie czy błędy taktyczne."

p) Poprawa: "Komitet wybrał przewodniczącego, który wyraził zadowolenie ze swojego wyboru na to stanowisko."

r) Poprawa: "Moje stanowisko opiera się na następujących argumentach: [tu wymienić argumenty], dlatego uważam je za słuszne."

s) Poprawa: "Nauka języka obcego to inwestycja, która często przynosi różnorodne korzyści, zarówno zawodowe jak i poznawcze."

t) Poprawa: "Badania sugerują, że pozytywne nastawienie może wspierać układ odpornościowy poprzez redukcję stresu, co może przyczyniać się do rzadszego występowania niektórych chorób."

u) Poprawa: "Komputery firmy Apple oferują specyficzne funkcje i design, które mogą być przydatne dla określonych zastosowań profesjonalnych i osobistych."

w) Poprawa: "Przekaż te informacje zespołowi. Wysłałem raport kwartalny mailem do wszystkich członków zespołu."

y) Poprawa: "Nasza rozmowa stała się bardzo rozbudowana, ale musimy ją zakończyć, ponieważ czas naszego spotkania dobiega końca."

z) Poprawa: "Teoria ewolucji to spójny system wyjaśnień naukowych poparty licznymi dowodami, podobnie jak inne uznane teorie naukowe."

9.7 Definicje w logice

Zadanie 1 Tu warto zaznaczyć, że jedną rzecz można zdefiniować na wiele sposobów więc jeśli twoja odpowiedź się różni od tych poniżej to nie znaczy, że twoja odpowiedź jest błędna. To co się liczy to ogólna poprawność definicji.

e) Słoń to duży ssak roślinożerny z rodziny słoniowatych, charakteryzujący się długą trąbą, dużymi uszami i masywnym ciałem. Występuje głównie w Afryce i Azji.

f) Dynamika to gałąź mechaniki zajmująca się badaniem ruchu ciał pod wpływem sił. Analizuje zmiany ruchu i przyczyny tych zmian.

g) Równowaga to stan, w którym siły działające na obiekt są zrównoważone, co prowadzi do jego spoczynku lub ruchu jednostajnego.

h) Fotosynteza to proces, w którym rośliny, niektóre bakterie i protisty przekształcają światło słoneczne w energię chemiczną, produkując tlen i glukozę z dwutlenku węgla i wody.

i) Demokracja to forma rządów, w której władza należy do ludu, który sprawuje ją bezpośrednio lub poprzez wybranych przedstawicieli.

j) Ekosystem to złożony system składający się z organizmów żywych oraz ich środowiska, w którym zachodzą interakcje międzygatunkowe i międzyorganizmowe.

k) Komputery to elektroniczne urządzenia przetwarzające dane, które wykonują obliczenia i operacje na informacjach zgodnie z zestawem instrukcji (programem).

l) Sztuka to orma ekspresji ludzkiej, obejmująca różne dyscypliny, takie jak malarstwo, rzeźba, muzyka, taniec i literatura, mająca na celu wywołanie emocji i refleksji.

Zadanie 2

e) Nie, definiens nie równa się definiendum.

f) Definicja poprawna.

g) Definicja poprawna.

h) Nie, definicja jest za wąska, czy jak odetniemy kotu ogon, to przestaje być kotem.

i) Nie, definicja jest kolista - polega to na tym, że określenie liczby całkowitej jako „liczby całkowitej” wprowadza do definicji samą ideę liczby parzystej, gdyż parzystość zależy od tego, że n można przedstawić jako wielokrotność liczby 2.

j) Nie, definicja nie zawiera istotnych cech.

k) Nie, definicja zbyt szeroka, czy woźny jest nauczycielem, skoro pracuje w szkole.

l) Nie, definicja zbyt szeroka, czy smartfon z czarnym ekranem to telewizor.

m) Nie, definicja nie podaje istotnych cech.

n) Definicja poprawna.

o) Definicja poprawna.

p) Definicja poprawna.

r) Nie, definicja jest kolista - odwołujemy się do pisania w definiendum i definiensie.

Zadanie 3 Tu warto zaznaczyć, że jedną rzecz można zdefiniować na wiele sposobów więc jeśli twoja odpowiedź się różni od tych poniżej to nie znaczy, że twoja odpowiedź jest błędna. To co się liczy to ogólna poprawność definicji regulującej.

b) Osoba, której majątek przekracza określoną wartość (np. 10 milionów złotych) lub posiada dochody, które znacząco wykraczają ponad średnią krajową.

c) Osoba, której średnia ocen w ciągu semestru lub roku akademickiego jest poniżej określonego progu (np. poniżej 3.0 w skali 5.0).

d) Podróż, której czas trwania wynosi ponad 6 godzin lub obejmuje odległość większą niż 500 km.

e) Pojazd porusza się szybciej niż dopuszczalna prędkość określona przez przepisy drogowe (np. o 20 km/h lub więcej).

f) Osoba, która regularnie spożywa alkohol w sposób, który negatywnie wpływa na jej życie osobiste, zawodowe i zdrowotne, oraz nie jest w stanie kontrolować swojego nałogu.

g) Osoba lub zespół znajduje się w czołowej części listy, określanej na podstawie wyników, ocen lub osiągnięć, np. w pierwszej dziesiątce na liście najlepszych graczy lub drużyn.

h) Student, który regularnie i w dużych ilościach wykonuje zadania pisemne, takie jak eseje, prace badawcze, notatki czy artykuły.

i) Kobieta, której masa ciała mieści się w dolnym zakresie normalnego indeksu masy ciała (BMI poniżej 18,5).

j) Osada licząca mniej niż 1000 mieszkańców, z ograniczoną infrastrukturą i niską gęstością zabudowy.

k) Miejscowość licząca powyżej 500 000 mieszkańców, z rozwiniętą infrastrukturą, przemysłem oraz wieloma usługami.

l) Osoba, która w zawodach biegowych osiąga czas poniżej określonego progu (np. poniżej 4 minut na kilometr w maratonie lub 12 sekund na 100 metrów).

Zadanie 4 Tu warto zaznaczyć, że jedną rzecz można zdefiniować na wiele sposobów więc jeśli twoja odpowiedź się różni od tych poniżej to nie znaczy, że twoja odpowiedź jest błędna. To co się liczy to ogólna poprawność definicji sprawozdawczej.

b) Metal szlachetny to pierwiastek chemiczny, który charakteryzuje się dużą odpornością na korozję i utlenianie, a także rzadkością występowania w naturze.

c) Budzik to urządzenie mechaniczne lub elektroniczne, służące do budzenia osoby o określonej godzinie poprzez wydawanie głośnych dźwięków lub inne sygnały.

d) Komputer to urządzenie elektroniczne służące do przetwarzania, przechowywania i zarządzania danymi, wykonujące operacje według określonych instrukcji, na przykład obliczenia, przetwarzanie tekstów czy interakcje z użytkownikami.

e) Trójkąt prostokątny to trójkąt, w którym jeden z kątów ma 90 stopni. Jego boki tworzą zależność opisującą twierdzenie Pitagorasa.

f) Hotel to obiekt noclegowy, który oferuje wynajem pokoi lub innych miejsc do spania dla gości, często wraz z dodatkowymi usługami, jak restauracja, basen, czy spa.

g) Zamek to duży, umocniony budynek, zwykle o charakterze obronnym, w którym dawniej mieszkała arystokracja lub władcy. Zamek może pełnić funkcję rezydencji lub obiektu obronnego.

h) Pociąg towarowy to zestaw wagonów, służący do transportu ładunków, surowców, towarów lub innych materiałów na dużą odległość przy użyciu torów kolejowych.

i) Państwo to suwerenna jednostka polityczna, posiadająca określone granice, rządy, instytucje oraz prawo, które kontroluje życie wewnętrzne i zewnętrzne swoich obywateli.

j) Klucz francuski to narzędzie ręczne służące do dokręcania lub odkręcania nakrętek i innych elementów o zmiennym rozmiarze, posiadające regulowaną szczękę, dzięki której można dostosować jego szerokość.

k) Nauczyciel akademicki to osoba zatrudniona w uczelni wyższej, której zadaniem jest przekazywanie wiedzy studentom, prowadzenie wykładów, seminariów, zajęć praktycznych oraz działalność naukowa.

Zadanie 5

c) Młotek-narzędzie składające się z twardej głowicy (zwykle metalowej) oraz uchwytu, używane do uderzania w przedmioty w celu ich kształtowania, montowania lub wbijania gwoździ, często używane w budownictwie, stolarstwie lub rzemiośle.

d) Stół-mebel składający się z płaskiej powierzchni (blatu) wsparty na nogach, przeznaczony do różnych czynności, takich jak jedzenie, prace biurowe czy spotkania towarzyskie.

e) Miłość-uczucie głębokiego przywiązania, szacunku i troski wobec drugiej osoby, które może przybierać różne formy, od romantycznej po platoniczną, zależnie od kontekstu i relacji.

Zadanie 6

d) definicja realna, definicja klasyczna, styl przedmiotowy

e) definicja realna, definicja nominalna (sprawozdawcza), styl słownikowy

f) definicja nominalna, definicja nieklasyczna (kontekstowa), styl semantyczny

g) definicja realna, definicja klasyczna, styl przedmiotowy

h) definicja nominalna, definicja równościowa, styl słownikowy

i) definicja nominalna, definicja nieklasyczna (indukcyjna), styl semantyczny

j) definicja realna, definicja nominalna (projektująca), styl przedmiotowy

k) definicja nominalna, definicja klasyczna, styl semantyczny

l) definicja realna, definicja klasyczna, styl przedmiotowy

m) definicja nominalna, definicja przez abstrakcję, styl semantyczny

Bibliografia

[Ajd 5] Ajdukiewicz, Kazimierz. *Zarys logiki.* Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1958, wyd. 5.

[Bor77] Borkowski, Ludwik. *Logika formalna: systemy logiczne: wstęp do metalogiki.* Warszawa: PWN, 1977.

[Car55] Carroll, Lewis. *Symbolic logic and the game of logic.* New York: Berkeley Enterprises, 1955.

[Cho00] Chodkowski, Tomasz. *Elementy logiki prawniczej: definicje, podziały i typy argumentacji.* Warszawa: Polskie Wydawnictwo Prawnicze Iuris, 2000.

[Cop61] Copi, Irving M. *Introduction to logic.* New York: The Macmillan Company, 1961.

[GW97] Gruszycka-Glabas, Maria i Wajszczyk, Józef. *Zbiór ćwiczeń z logiki.* Olsztyn: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1997.

[Grz61] Grzegorczyk, Andrzej. *Logika popularna. Przystępny zarys logiki zdań.* Warszawa: PWN, 1961.

[Idz15] Idziak, Katarzyna. *Materiały pomocnicze do ćwiczeń z logiki.* Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 2015.

[Lec23a] Lechniak, Marek. *XII Konkurs Logiczny. Materiały przygotowujące do etapu finałowego.* https://konkurslogiczny.kul.pl/wp-content/uploads/2024/05/2024_konkurs-logiczny_skrypt2_final.pdf. [Dostęp: 2025-03-02]. 2023.

[Lec23b] Lechniak, Marek. *XII Ogólnopolski Konkurs Logiczny. Materiały przygotowujące do etapu szkolnego.* https://konkurslogiczny.kul.pl/wp-content/uploads/2024/03/12_konkurs_logiczny_skrypt_1.pdf. [Dostęp: 2025-03-02]. 2023.

[Lec 2] Lechniak, Marek. *Elementy logiki dla prawników.* Lublin: Wydawnictwo KUL, 2012, wyd. 2.

[Lip75] Lipczyńska, Maria. *Zbiór zadań z logiki.* Wrocław: PWN, 1975.

[Log21a] Logika na codzień. *Kurs logiki, sylogistyka, odc. 09: Wykorzystanie diagr. Venna do badania poprawności sylogizmów (1).* https://www.youtube.com/watch?v=sRkMHjOccHs. [Dostęp: 2025-03-02]. 2021.

[Log21b] Logika na codzień. *Kurs logiki, sylogistyka, odc. 10: Wykorzystanie diagr. Venna do badania poprawności sylogizmów (2).* https://www.youtube.com/watch?v=UPkFOOJoy94&t=75s. [Dostęp: 2025-03-02]. 2021.

[MO78] Marek, Wiktor i Onyszkiewicz, Janusz. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Warszawa: PWN, 1978.

[Pog75] Pogorzelski, Adam Witold. *Klasyczny rachunek zdań: zarys teorii.* Warszawa: PWN, 1975.

[Pur71] Purtill, Richard L. *Logic for philosophers.* New York: Harper Row, 1971.

[Smu03] Smullyan, Raymond. *Dama czy tygrys?* Warszawa: Książka i Wiedza, 2003.

[Smu 1] Smullyan, Raymond. *Jaki jest tytuł tej książki?* Warszawa: Książka i Wiedza, 1998, wyd. 1.

[Sta82] Stanosz, Barbara. *Ćwiczenia z logiki.* Warszawa: PWN, 1982.

[Suc96] Suchoń, Wojciech. *Sylogistyka: interpretacja zakresowa.* Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 1996.

[Suc99] Suchoń, Wojciech. *Sylogistyki klasyczne: podręcznik z ćwiczeniami komputerowymi.* Kraków: Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych 'Universitas', 1999.

[SWW 2] Szymanek, K., Wieczorek, Krzysztof A. i Wójcik, Andrzej S. *Sztuka argumentacji.Ćwiczenia w badaniu argumentów.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004, wyd. 2.

[Waj97] Wajszczyk, J. *Wprowadzenie w podstawowe zagadnienia logiki.* Olsztyn: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1997.

[Wie05] Wieczorek, Krzysztof A. *Wprowadzenie do logiki.* Warszawa: Skrypt, 2005.

[Woj16] Wojciechowski, Eugeniusz. “Sylogistyka jako fragment ontologii elementarnej.” W: *Roczniki filozoficzne* (1995-01, z. 1, s. 109-116).