KATOLICKI UNIWERSYTET LUBELSKI JANA PAWŁA II KUL 1918

WYDZIAŁ FILOZOFII

FUNDACJA ROZWOJU KUL

OGÓLNOPOLSKI

KONKURS LOGICZNY

KONKURSLOGICZNY.KUL.PL

etap finałowy | 13 czerwca 2024

skrypt

ETAP FINAŁOWY

patronat medialny

filozofuj!

projekt Andrzej Zykubek

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

SPOŁECZNA ODPOWIEDZIALNOŚĆ NAUKI II

PROJEKT DOFINANSOWANY
ZE ŚRODKÓW BUDŻETU PAŃSTWA,
PRZYZNANYCH PRZEZ MINISTRA NAUKI
W RAMACH PROGRAMU
SPOŁECZNA ODPOWIEDZIALNOŚĆ NAUKI II

Marek Lechniak
Katedra Logiki KUL

XII Konkurs Logiczny
Materiały przygotowujące do etapu finałowego

Lublin 2023/24

Spis treści

Wprowadzenie

Za nami pierwszy etap XII Konkursu Logicznego. Mamy nadzieję, że przygotowanie się do tego etapu przysporzyło Wam wiele przyjemności intelektualnej i rozszerzyło Waszą wiedzę oraz, przede wszystkim, pomogło ćwiczyć Wasze sprawności logiczne. Niektórzy z Was przeszli ten etap konkursu, kwalifikując się do finału. Innych z Was, choć tym razem się nie udało, zapraszamy już dziś do udziału w konkursie w przyszłym roku.

Niniejszym prezentujemy II część materiałów konkursowych. Stanowi ona rozszerzenie tematyki poruszonej w części I. Tam, jak pamiętacie, zajmowaliśmy się zadaniami w zakresie klasycznego rachunku zdań i elementarnego rachunku nazw. Jest to podstawa całej logiki klasycznej. Jednak nie każde poprawne rozumowanie da się uzasadnić wyłącznie w oparciu o klasyczny rachunek zdań. Dlatego zaprezentujemy tu odrobinę wiedzy na temat węższego rachunku predykatów – systemu logiki nabudowanego nad rachunkiem zdań; potem wiedzę o tym rachunku rozszerzymy jeszcze o znak identyczności (znacie go dobrze, ale może nie wiecie, jak bardzo zwiększa on możliwości wyrażania się). Oczywiście wszystko, czego wcześniej nauczyliście się z logiki, nadal obowiązuje. Podczas testu finałowego możecie więc spodziewać się zadań z zakresu materiału, którego dotyczył etap szkolny wzbogaconego o kilka zadań z zakresu omówionego w niniejszej części.

Rozdział 1

Węższy rachunek predykatów

1.1. Wyrażenia rachunku predykatów

Rozważmy następujące wnioskowanie:

$$\frac{\textit{Każdy uczeń jest młodym człowiekiem.}}{\textit{Każda matka ucznia jest matką młodego człowieka.}}$$

Chociaż oba występujące w tym wnioskowaniu zdania są zdaniami kategorycznymi, a wnioskowanie intuicyjnie wydaje się poprawne, nie można jego poprawności zbadać za pomocą teorii zdań kategorycznych, mimo, że słowa „uczeń”, „młody człowiek” występują i w przesłance, i we wniosku. Jednak we wniosku słowa te nie są terminami, ale częściami terminów. Schemat powyższego wnioskowania należy więc napisać w postaci:

$$\frac{SaP}{MaN}$$

(gdzie S — „uczeń”, P — „młody człowiek”, M — „matka ucznia”, N — „matka młodego człowieka”.)
Taki schemat nie jest formalnie poprawny. Choć w przesłance i wniosku występują te same słowa, to jednak różne terminy. Z punktu widzenia teorii zdań kategorycznych mamy więc wnioskowanie o czterech całkowicie różnych terminach, a wtedy wniosek oczywiscie nie da się uzasadnić w oparciu o przesłankę. Przyczyną niemożności adekwatnego zapisania w języku teorii zdań kategorycznych schematu powyższego wnioskowania jest zbyt ubogi język tej teorii — nie występują w nim zwroty umożliwiające wyrażenie relacji między przedmiotami (a relacji dotyczy zarówno zwrot „matka ucznia”, jak i zwrot „matka młodego człowieka”). Musimy poszukiwać takiego jezyka, w którym mozna wypowiadać się na temat relacji.

Odpowiednio bogaty język, który umożliwia badanie poprawności tego rodzaju wnioskowań, występuje w tzw. węższym rachunku predykatów (czasem zwanym również rachunkiem kwantyfikatorów); teoria zdań kategorycznych może być traktowana (po przyjęciu pewnych założeń dodatkowych - niżej powiemy jakich) jako część węższego rachunku predykatów.

Wszelkie zdania języka potocznego, jakim się posługujemy mogą być podzielone na zdania podmiotowo-orzecznikowe (*Jan jest rybakiem*) lub podmiotowo-orzeczeniowe (*Jan lubi Marię*), przy czym zdania podmiotowo-orzecznikowe można przedstawić jako pewną postać zdań podmiotowo-orzeczeniowych (wtedy bierzemy pod uwagę podmiot - *Jan* + orzeczenie imienne *jest ry-*

bakiem, złożone z łącznika *jest* oraz orzecznika *rybakiem*. W rachunku predykatów, jako podstawową, zakładamy strukturę zdań podmiotowo-orzeczeniową. Przykładami zdań jednostkowych o takiej strukturze są:

Jan śpi.
Jan śpiewa.
Jan jest kawalerem.
Jan jest wyższy od Piotra.
Jan kocha Zenobię.
Jan siedzi pomiędzy Karolem a Zenobią.

Pierwsze trzy zdania stwierdzają własności indywiduum (człowieka o imieniu Jan): jego stany, cechy lub czynności jakie wykonuje, natomiast trzy następne zdania stwierdzają relacje zachodzące między indywiduami — parą indywiduów („jest wyższy od", „kocha") lub trójką indywiduów („siedzi między ... a ..."). Zwroty, które określają własności indywiduów lub wyrażają zachodzenie relacji między indywiduami, nazywamy predykatami.

Charakteryzowane od strony syntaktycznej predykaty są funktorami zdaniotwórczymi od jednego, lub więcej niż jednego, argumentu nazwowego. Przykładami predykatów jednoargumentowych są: „śpi", „śpiewa", „jest człowiekiem", „jest kawalerem", a przykładami predykatów więcej niż jednoargumentowych zwroty: „lubi", „jest wyższy od", „siedzi między ... a ...", i tym podobne. W rachunku predykatów nazwom jednostkowym (o których „myślimy" w taki sposób jak o nazwach indywidualnych) odpowiadają zmienne indywiduowo-nazwowe (reprezentowane przez zmienne x, y, z), natomiast predykatom odpowiadają zmienne reprezentujące predykaty (zmienne A, B, C, P, Q). Oczywiście zdania proste języka rachunku predykatów mogą być łączone w zdania złożone, dlatego u podstaw węższego rachunku predykatów, podobnie jak u podstaw teorii zdań kategorycznych, przyjmuje się klasyczny rachunek zdań.

W analizowanym we wstępie do tego rozdziału wnioskowaniu nie występują jednak zdania jednostkowe, lecz zdania kategoryczne stwierdzające, że wszystkie elementy jakiegoś zbioru przynależą do innego zbioru. Zdanie kategoryczne, przypomnijmy, zbudowane jest z dwóch nazw ogólnych oraz funktora zdaniotwórczego od tych nazw. Funktor ten wyraża „ile" przedmiotów jednego zbioru (wskazanego przez podmiot zdania) posiada cechę stwierdzaną w orzeczniku („każdy jest", „niektóre są", „niektóre nie są", „żaden nie jest"). W rachunku predykatów stałymi logicznymi służącymi do stwierdzenia tego, ile przedmiotów (indywiduów) posiada jakąś własność lub pozostaje względem siebie w jakiejś relacji, są kwantyfikatory.
Oto przykłady wyrażeń zdaniowych węższego rachunku predykatów:

a) wyrażenia atomiczne $A(x)$, $B(c)$, $P(x,\ y,\ b)$
b) wyrażenia złożone ze zmiennych zdaniowych lub wyrażeń atomicznych za pomocą funktorów prawdziwościowych: $p \vee P(x,\ b)$, $A(x) \to P(a,\ x,\ z)$;
c) wyrażenia, w których jakieś wyrażenie zdaniowe zostało poprzedzone kwantyfikatorem ze zmienną indywiduową: $(\exists x)(A(x) \to B(y))$, $p \to (\forall x)(A(x) \to B(y))$, $(\forall x)p$;

Nie są poprawnie zbudowane na przykład następujące ciągi znaków: $A(p)$, $(\exists A)(A(x) \to B(x))$, $(\forall)A(x)$. O kwantyfikatorach mówi się, że są one wyrażeniami, które wiążą zmienne, to znaczy „pozbawiają te zmienne wolności". Zmienna wolna zaś to taka zmienna, za którą wolno podstawiać. Teraz podamy dokładniejsze określenie zmiennej wolnej. Przy tym mówiąc o wyrażeniach z kwantyfikatorem używamy następujących terminów:

znak kwantyfikatora

$$(\forall x)\underbrace{A(x)}_{\text{zasięg kwantyfikatora}}$$

zmienna przy kwantyfikatorze

W podręcznikach szkolnych zamiast symboli $(\forall x)A(x), (\exists x)A(x)$ często można znaleźć symbole $\bigwedge\limits_{x} A(x)$, $\bigvee\limits_{x} A(x)$. Znaczą one oczywiście to samo, co „nasze" odwrócone A i E (od „for all", „exists") więc każdy, kto jest do nich „przywiązany" może ich używać w zastępstwie symboli, które stosujemy w naszym mini-podręczniku.

Termin „zasięg kwantyfikatora" oznacza wyrażenie zdaniowe, w którym zmienna wskazana przy kwantyfikatorze (objęta działaniem kwantyfikatora) jest związana przez ten kwantyfikator.

Definicja 1. *Zmienna α jest wolna w pewnym miejscu wyrażenia φ wtedy i tylko wtedy, gdy α występuje w tym miejscu wyrażenia φ i nie jest przy kwantyfikatorze oraz nie jest w zasięgu kwantyfikatora. Zmienna α jest wolna w wyrażeniu φ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wolna w pewnym miejscu wyrażenia φ.*

Przykłady:

$$(\forall x)(A(x) \to B(y))$$

W wyrażeniu powyższym x nie jest zmienną wolną (bo jest przy kwantyfikatorze oraz w zasięgu kwantyfikatora), y jest zmienną wolną (wprawdzie jest w nawiasie, przed którym wystepuje kwantyfikator, ale ów kwantyfikator wiaże zmienną x), z nie jest zmienną wolną (ponieważ zmienna z w ogóle nie występuje w tym wyrażeniu);

$$(\forall x)A(y) \to B(x)$$

Tu z kolei x — zmienna wolna (ponieważ x występuje przy kwantyfikatorze, ale x nie występuje w zasięgu kwantyfikatora, bo ten wiaże tylko do pierwszego dwuargumentowego funktora prawdziwościowego, y — zmienna wolna, z — nie jest wolna. Zmiennej wolnej czasem przeciwstawiana bywa zmienna związana. Nie jest to do końca prawda; ściśle mówiąc zmienne dzielimy na wolne i nie-wolne (a *nie-wolność* zmiennej ma dwa przypadki: kiedy zmienna jest zwiazana oraz kiedy zmienna nie wystepuje w wyrażeniu). Mówimy, że w wyrażeniach $(\forall\alpha)\phi$, $(\exists\alpha)\phi$ kwantyfikator wiąże zmienną α występującą przy nim oraz zmienną α wolną w ϕ; inaczej mówimy, że taka zmienna jest związana przez kwantyfikator.

Operacja podstawiania za zmienne odpowiednich zmiennych bądź stałych pozalogicznych (np. imin własnych) powinna na wstępie zostać poddana odpowiedniej regulacji po to, aby w wyniku podstawiania nie można było przejść od zdań prawdziwych do zdania fałszywego. Przyjmuje się więc następujące warunki prawidłowego podstawiania:

1) Na każdym miejscu, w którym α występuje w φ jako zmienna wolna, podstawiamy to samo wyrażenie.
2) Żadna zmienna wolna wyrażenia podstawianego po podstawieniu nie może stać się związaną w wyniku podstawienia na miejscu podstawienia.

Rozważmy następujący przykład. Wyrażenie $(\exists x)(x > y)$ jest spełnione przez każdą liczbę naturalną, gdyż dla dowolnej takiej liczby istnieje liczba od niej większa. Gdybyśmy jednak w tym wyrażeniu podstawili za zmienną wolną y zmienną x, otrzymalibyśmy fałszywe wyrażenie $(\exists x)(x > x)$. Podstawienie takie jest jednak niepoprawne, ponieważ nie spełnia drugiego z warunków prawidłowego podstawiania.

1.1.1. Metoda sprawdzania wyrażeń rachunku predykatów za pomocą diagramów Venna

Czytelnik, który zapoznał się już z klasycznym rachunkiem zdań i teorią zdań kategorycznych może w tym miejscu zapytać, czy istnieje, tak jak w tamtych teoriach, metoda rozstrzygania o dowolnym wyrażeniu węższego rachunku predykatów, czy jest ono prawem logiki, czy też nie. Odpowiedź na to pytanie jest następująca: węższy rachunek predykatów jest nierozstrzygalny, to znaczy, że nie istnieje metoda pozwalająca w skończonej liczbie kroków o każdym wyrażeniu zapisanym w jego języku orzec, czy jest prawem logiki, czy też nie. Rozstrzygalny natomiast jest fragment węższego rachunku predykatów odnoszący się do wyrażeń, w których występują wyłącznie predykaty jednoargumentowe. Gdy idzie o tego typu wyrażenia metoda rozstrzygania opiera się na zastosowaniu diagramów Venna. W poniższym paragrafie przedstawimy kilka uwag na temat interpretacji wyrażeń z predykatami jednoargumentowymi — interpretacja ta pozwala lepiej intuicyjnie uchwycić sens kwantyfikatorów.

Niech symbol V oznacza uniwersum, czyli zbiór wszystkich przedmiotów w jakiejś dziedzinie (np. zbiór ludzi, zbiór studentów). Z kolei symbol $\emptyset$ oznacza zbiór pusty, czyli zbiór, do którego nie należy żaden przedmiot (np. zbiór bezdzietnych ojców). Wówczas wyrażenie $\mathcal{A} = \emptyset$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem pustym, tj. że żaden przedmiot nie należy do zbioru $\mathcal{A}$ (symbol A reprezentuje własność przedmiotu, podczas gdy symbol $\mathcal{A}$ - zbiór przedmiotów posiadających własność reprezentowaną przez predykat A). Wyrażenie $\sim (\mathcal{A} = \emptyset)$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ jest niepusty, tj. że istnieją przedmioty należące do zbioru $\mathcal{A}$. Wyrażenie $\mathcal{A} = V$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem uniwersalnym, tj. że każdy przedmiot należy do zbioru $\mathcal{A}$, a wyrażenie $\sim (\mathcal{A} = V)$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ nie jest zbiorem uniwersalnym, tj. że pewne przedmioty nie należą do zbioru $\mathcal{A}$.

Po przyjęciu powyższych ustaleń można stwierdzić, że prawdziwe są następujące równoważności:

$$(\forall x)A(x) \equiv \{x : A(x)\} = V$$

$$\sim (\forall x)A(x) \equiv\sim (\{x : A(x)\} = V)$$

$$(\exists x)A(x) \equiv\sim (\{x : A(x)\} = \emptyset)$$

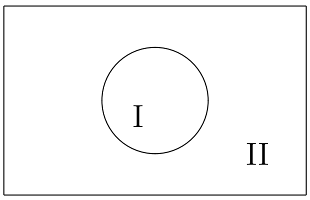
$$\sim (\exists x)A(x) \equiv \{x : A(x)\} = \emptyset$$

$$(\forall x) \sim A(x) \equiv \{x :\sim A(x)\} = V$$

$$(\exists x) \sim A(x) \equiv\sim (\{x :\sim A(x)\} = \emptyset)$$

Sposób odczytania powyższych wzorów wyjaśnijmy na przykładzie wzoru pierwszego. Stwierdza on, że „Dla każdego x, $A(x)$" jest równoważne stwierdzeniu, że „zbiór x mających własność A (w taki sposób odczytujemy zapis: $\{x : A(x)\}$) jest równy zbiorowi wszystkich przedmiotów V". Z kolei np. wzór ostatni czytamy w sposób następujący: „dla pewnego x, nie jest tak, że x posiada własność A wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że zbiór x-ów nie mających własności A jest zbiorem pustym".

Powyższe wzory mogą służyć już jako podstawa graficznej interpretacji zdań z kwantyfikatorami. W diagramie Venna:

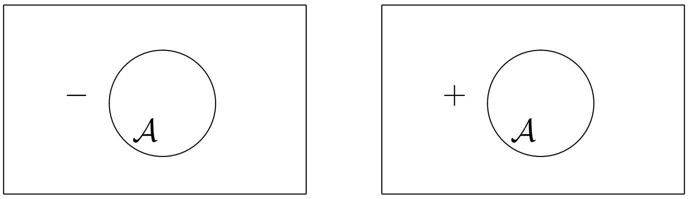


cały prostokąt symbolizuje zbiór uniwersalny V. Obszar I symbolizuje zbiór $\{x : A(x)\}$, zaś obszar II symbolizuje zbiór $\{x :\sim A(x)\}$.

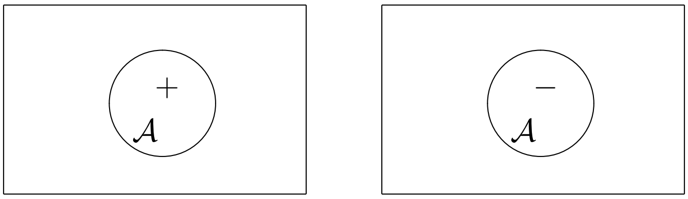
Niepustość danego zbioru zaznaczamy na diagramie umieszczając znak „+" na obszarze symbolizującym dany zbiór. To, że dany zbiór jest pusty, zaznaczamy na diagramie stawiając „–" na obszarze reprezentującym ten zbiór. Fakt zaś, że dany zbiór jest uniwersalny, zaznaczamy na diagramie stawiając „–" na części prostokąta poza obszarem symbolizującym ten zbiór. To, że dany zbiór nie jest uniwersalny, zaznaczamy na diagramie umieszczając znak „+" poza obszarem symbolizującym ten zbiór. W ten sposób powyższe wzory można przedstawić w sposób graficzny. Otrzymamy następujące diagramy Venna przedstawiające prawdziwość lub fałszywość wyrażeń utworzonych za pomocą kwantyfikatorów:

Prawdziwość *Fałszywość*

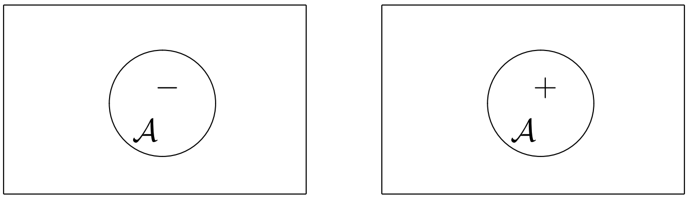
$(\forall x)A(x)$



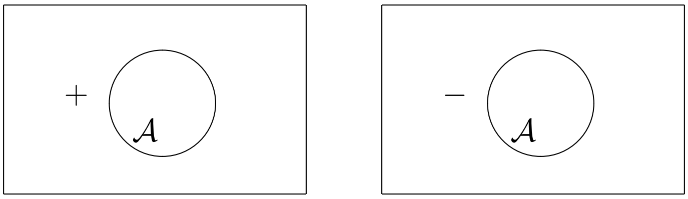
$(\exists x)A(x)$



$(\forall x) \sim A(x)$



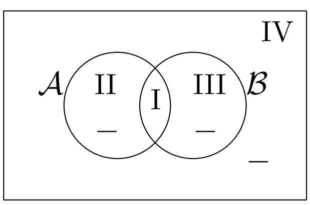
$(\exists x) \sim A(x)$



Zadanie 1.
Sprawdź za pomocą diagramów Venna czy poniższe wyrażenie jest prawem logiki:

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow [(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)]$$

Ponieważ sprawdzane wyrażenie ma postać implikacji, możemy założyć w punkcie wyjścia prawdziwość poprzednika tej implikacji (lub fałszywość jej następnika). Załóżmy zatem, że poprzednik implikacji jest prawdziwy. Wówczas prawdziwe jest zdanie $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$, tzn. że zbiorem pustym jest ten podzbiór uniwersum, który zawiera przedmioty nie posiadające łącznie własności A wraz z własnością B. Rysujemy diagram, stawiając na obszarach II, III oraz IV „–".



Jak możemy zobaczyć, na diagramie zaznaczona została pustość zbioru wszystkich przedmiotów nie mających własności A („–" na obszarach III, IV) oraz pustość zbioru wszystkich przedmiotów nie mających własności B („–" na obszarach II i IV). A zatem prawdziwe jest zdanie $[(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)]$, czyli badane wyrażenie jest prawem logiki.

1.1.2. Węższy rachunek predykatów z identycznością

Widzimy z powyższych rozważań, że wprowadzenie kwantyfikatorów pozwala nam wyrażać wiedzę na temat tego, ile przedmiotów jakiegoś rodzaju ma taką a taką cechę, czy pozostaje względem czegoś w jakiejś relacji. Ale dotąd możemy mówić jedynie o wszystkich przedmiotach albo o co najmniej jednym przedmiocie. Natomiast trudno w tym języku wyrazić takie np. zdanie *Co najwyżej jedna osoba wygrała Konkurs logiczny*, *Co najmniej trzy osoby przyjechały ze Świnoujścia*. Do tego potrzebujemy jeszcze małego rozszerzenia języka węższego rachunku predykatów o znak =.

Identyczność to relacja, która "nigdy nie zachodzi między dwoma przedmiotami"; innymi słowy, jak powiedział Leibniz, dwie rzeczy są identyczne, gdy mają wszystkie własności takie same (niczym się nie różnią); tę definicję można zapisać tak:
$x = y \equiv \forall A(A(x) \equiv A(y))$.
Jednak ta definicja, choć bardzo intuicyjna ma jedną wadę: kwantyfikator wiąże zmienną reprezentującą predykat, a to rodzi liczne problemy. Są różne sposoby ominięcia tej trudności – tu podamy najprostszy: zdefiniowanie identyczności przez zespół następujących postulatów:

1. $x = x$
2. $x = y \rightarrow y = x$
3. $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

Teraz już możemy zdefiniować kwantyfikatory wskazujące, ile przedmiotów spełniających jakiś warunek istnieje; są to tzw. kwantyfikatory ilościowe. Mamy trzy rodziny takich kwantyfikatorów: "Dla co najmniej n x-ów, $A(x)$", "Dla co najwyżej n x-ów, A(x)' oraz "Dla dokładnie n x-ów, $A(x)$":

— Dla co najmniej n przedmiotów:
  — Dla co najmniej jednego x, $A(x) \equiv \exists x A(x)$;
  — Dla co najmniej dwóch x, $A(x) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y]$
  — Dla co najmniej trzech x, $A(x) \equiv \exists x \exists y \exists z[A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z]$ (muszą być trzy nierówności, bo relacja „nie jest identyczny", w przeciwieństwie do = nie jest przechodnia).
— Dla co najwyżej jednego x, A(x) $\equiv$ Nie jest tak, że dla co najmniej dwóch x-ów, A(x)$\equiv\sim \exists x \exists y(A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y) \equiv \forall x \forall y[A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y]$ (korzystamy z praw węższego rachunku predykatów).
  Ogólnie: Dla co najwyżej n-xów, $A(x)\equiv\sim$ (Dla co najmniej $n+1$ x, $A(x)$)
— Dla dokładnie jednego x, $A(x)\equiv$ (Dla co najmniej jednego x, $A(x)$)$\wedge$ (Dla co najwyżej jednego x, $A(x)$) $\equiv [\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y(A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y)]$

1.1.3. Zapisywanie wyrażeń języka naturalnego w języku węższego rachunku predykatów

Język węższego rachunku predykatów, mimo swej prostoty, ma dużą siłę wyrazu. Często można spotkać opinię, że każde z poprawnie postawionych zagadnień naukowych można adekwatnie zapisać w języku tego rachunku wzbogaconego o znak identyczności. W niniejszym paragrafie pokażemy jak dokonywać przekładu zdań języka naturalnego na język węższego rachunku predykatów z identycznością.

Zanim przejdziemy do przykładów dogodnie jest przyjąć definicje tak zwanych kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie. Przypomnijmy, że zdanie z kwantyfikatorem ogólnym jest bardzo mocne — kwantyfikator działa „z dokładnością" do uniwersum, to znaczy, że stwierdzając $(\forall x)A(x)$ uznajemy, że nie istnieją żadne przedmioty nie mające własności A. Trudno jednak w praktyce znaleźć taką własność, którą posiadałyby wszystkie przedmioty. Zwykle określoną własność posiadają natomiast wszystkie przedmioty należące do jakiegoś podzbioru uniwersum (np. dwunożność przysługuje wszystkim elementom zbioru ludzi, a posiadanie uprawnień prokuratorskich — wszystkim prokuratorom). Zakres działania kwantyfikatora zostaje wówczas ograniczony do jakiegoś podzbioru uniwersum (czasem nazywamy to zbiorem poważnych możliwości). Wprowadzamy zatem następujące definicje:

Definicja 2. *Dla każdego x, takiego, że $A(x)$, $B(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $(\forall x)(A(x) \to B(x))$

Definicja 3. *Dla pewnego x, takiego, że $A(x)$, $B(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $(\exists x)(A(x) \land B(x))$

Pierwszy z kwantyfikatorów „Dla każdego x, takiego, że $A(x)$" odpowiada zwrotom języka naturalnego postaci „Każde ...", np. „każdy kot", „każdy prawnik" lub — w zdaniach przeczących — „żaden sędzia", „żadna ustawa" itp. Natomiast drugi z kwantyfikatorów odpowiada sformułowaniom postaci „pewien ...", „niektórzy ...", itp. np. „niektórzy sędziowie", „pewien logik".

Zadanie 2. Zapisz w języku rachunku predykatów następujące zdania:

a) *Każdy polityk jest prawdomówny.*
Oznaczmy: A — jest politykiem, B — jest prawdomówny.
W zdaniu użyto ogólnego kwantyfikatora o zakresie ograniczonym do zbioru polityków. Odpowiednikiem tego zdania w rachunku predykatów jest wyrażenie:

$$(\forall x)(A(x) \to B(x))$$

które możemy przeczytać w sposób następujący: *Dla każdego przedmiotu (czegoś, kogoś) mającego własność bycia politykiem przedmiot ten ma własność bycia prawdomównym.*

b) *Żaden filozof nie jest prawnikiem.*
Oznaczenia: A — jest filozofem, B — jest prawnikiem

$$(\forall x)(A(x) \to \sim B(x))$$

lub

$$\sim (\exists x)(A(x) \land B(x))$$

c) *Niektórzy prawnicy są sędziami.*
Oznaczenia: A — jest prawnikiem, B — jest sędzią

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)]$$

d) *Niektórzy sędziowie nie są wysocy.*
Oznaczenia: A — jest sędzią, B — jest wysoki

$$(\exists x)(A(x) \wedge \sim B(x))$$

Powyższe cztery przykłady podają jak zapisać w języku węższego rachunku predykatów cztery rodzaje zdań kategorycznych. Gdybyśmy mieli do czynienia wyłącznie ze zdaniami takich rodzajów, wprowadzanie węższego rachunku predykatów nie byłoby zasadne, gdyż język teorii zdań kategorycznych jest znacznie łatwiejszy w stosowaniu. Teraz rozważmy jednak przykład trudniejszy:

e) *Każdy prawnik jest uczniem pewnego logika.*
Oznaczenia: A —jest prawnikiem, B — jest logikiem, P - jest uczniem
Uwaga. Predykat „jest uczniem" jest predykatem dwuargumentowym (ktoś jest uczniem kogoś). Zdanie można przełożyć na niezbyt elegancki język polski: *Dla każdego przedmiotu będącego prawnikiem istnieje jakiś przedmiot będący logikiem taki, że pomiędzy pierwszym przedmiotem a drugim przedmiotem zachodzi relacja „jest uczniem"*, a to zdanie można już zapisać, jak następuje:

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow (\exists y)(B(y) \wedge P(x,\ y))]$$

1.1.4. Zadania

1. Zapisz w języku węższego rachunku predykatów następujące zdania języka naturalnego:

a) Istnieją ludzie, którzy są muzykami.
b) Każde zwierzę jest bytem.
c) Wszyscy ludzie są istotami rozumnymi.
d) Żaden człowiek nie jest aniołem.
e) Żaden bogacz nie jest biedny i nie cierpi na niedostatek materialny.
f) Istnieją kobiety, które są piękne.
g) Wszystkie kobiety są piękne.
h) Wszystkie kobiety malują paznokcie. (przyjmij oznaczenia A – jest kobietą, B – jest paznokciem, R – maluje)
i) Nie wszyscy ludzie mają rodzeństwo.
j) Niektórzy ludzie nie piją alkoholu.

2. Podaj po dwa przykłady zdań języka polskiego odpowiadających następującym wyrażeniom rachunku predykatów:

a) $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim R(x,y))]$

b) $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(R(x,y) \rightarrow \sim Q(y))]$

c) $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\forall(y)(Q(x) \rightarrow R(x, y))]$

d) $(\forall x)[(P(x) \wedge \sim Q(x)) \rightarrow (\exists y) \sim R(x, y)]$

3. Wykaż, za pomocą diagramów Venna, że poniższe wyrażenia są prawami logiki (tautologiami):

$$(\forall x)[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)] \tag{1.1}$$

$$(\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)] \tag{1.2}$$

$$(\exists x)[A(x) \vee B(x)] \rightarrow [(\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)] \tag{1.3}$$

$$[(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)] \rightarrow (\forall x)[A(x) \vee B(x)] \tag{1.4}$$

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)] \tag{1.5}$$

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)] \tag{1.6}$$

4. Zapisz w języku węższego rachunku predykatów następujące prawa teorii zdań kategorycznych i wykaż ich prawdziwość za pomocą diagramów Venna (o jakim założeniu trzeba pamiętać przy takim przekładzie?):

a) $SaP \rightarrow SiP$
b) $SeP \rightarrow \sim SaP$
c) $SaP \rightarrow \sim SoP$
d) $\sim SiP \rightarrow SoP$

5. Zapisz w sposób formalny następujące zdania:

a) Dwóch uczniów ma jednego nauczyciela logiki.
b) Co najmniej jeden student kocha logikę.
c) Każdy student ma dokładnie jednego ojca.
d) Co najwyżej dwóch członków Drużyny Pierścienia doszło do Mordoru.

1.2. Zagadki

1. Znajdujesz się w krainie zamieszkanej wyłącznie przez rycerzy i łotrów. Podczas zwiedzania wyspy spotykasz dwie osoby, z których jedna jest znanym ci łotrem, a o drugiej nic nie wiesz. Napotkani wypowiadają następujące zdania:
Łotr: Poza pałacem królewskim mieszka przynajmniej jeden rycerz, poza tym, poza pałacem mieszkają też wszyscy łotrzy.
Nieznajomy: Jeżeli na jednego łotra przypada jeden rycerz, to na wyspie mieszka przynajmniej jeden łotr.
Czy z tych zdań można wywnioskować, że w pałacu mieszka przynajmniej jeden łotr?

2. Znajdujesz się w pałacu królewskim i idąc do swojej komnaty napotykasz młodzieńca, który stwierdza: Nie wszyscy rycerze mają konie wtedy i tylko wtedy, gdy wszyscy rycerze nie mają koni. Napotkany młodzieniec jest rycerzem czy łotrem?

3. W Wolnej Republice Bananów istnieje miasteczko zwane Zembla, którego wszyscy mieszkańcy są blondynami. W Republice żaden blondyn nie jest nieuczciwy. Obecny prezydent Republiki ma 160 cm wzrostu i bujną rudą czuprynę. Które z następujących stwierdzeń jest na pewno fałszywe?
Obecny prezydent Republiki jest nieuczciwy.
Żaden nieuczciwy człowiek nie jest mieszkańcem Zembli.
Żaden mieszkaniec Zemblii nie jest nieuczciwy.
Wszyscy uczciwi są Zemblanami.
Prezydent jest uczciwym Zemblaninem.

4. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Adama, Tomasza i Zygmunta. Adama twierdzi, że Zygmunt i Tomasz są tacy sami. Tomasz powiedział: „Dokładnie jedno z tych zdań jest prawdziwe: ja jestem rycerzem lub Zygmunt jest rycerzem". Zygmunt stwierdził, że Adam jest łotrem.

Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

5. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Zenona, Dawida, Tadeusza. Zenon powiedział: „Ja jestem rycerzem i Tomasz jest łotrem". Dawid powiedział, że Zenon jest łotrem. Tomasz stwierdził, że Zenon jest łotrem lub Dawid jest łotrem.

Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

6. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Bartosza, Stefana, Cezarego. Bartosz stwierdził, że Stefan mógł powiedzieć, że Cezary jest rycerzem. Stefan powiedział, że nieprawdą jest Cezary jest łotrem. Cezary stwierdził, że fałszem jest to, że Bartosz jest łotrem.

Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

7. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Romana, Bogdana, Mirka. Roman stwierdził: „Bogdan jest łotrem". Bogdan powiedział: „Mirek I ja jesteśmy obydwoje rycerzami lub obydwoje łotrami", Mirek stwierdził, że Bogdan jest łotrem. Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

1.3. Odpowiedzi

1. a) L- jest człowiekiem, M - jest muzykiem $\exists x(C(x) \wedge M(x))$; b) Z - jest zwierzęciem, B- jest bytem $\forall x(Z(x) \rightarrow B(x))$; e) B- jest bogaczem, U - jest biedny, C - cierpi na niedostatek $\forall x(B(x) \rightarrow \sim (U(x) \wedge C(x)))$; h) A - jest kobietą, B- jest paznokciem, R - maluje $\forall x(K(x) \rightarrow \exists y(P(x) \wedge M(x, y)))$ (malują niektóre paznokcie) lub $\forall x(K(x) \rightarrow \forall y(P(x) \rightarrow M(x, y)))$ (malują wszystkie paznokcie); i) C - jest człowiekiem, R - jest rodzeństwem (predykat dwuargumentowy) $\sim \forall x(C(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge R(y, x)))$
2. a) P - jest politykiem, Q - jest wyborcą, R - jest przyjacielem: istnieją politycy, którzy nie lubią żadnego wyborcy; b) może być takie samo zdanie (bo $(Q(y) \rightarrow \sim R(x, y)) \equiv (R(x, y) \rightarrow \sim Q(y))$
3. a) kreska na wszystkich obszarach oprócz części wspólnej A, B;
   b) krzyzyk na części wspólnej A, B;
   c) można założyć fałszywość następnika - wtedy kreska na całym obszarze A (nie istnieje x, że A(x)) i na całym obszarze B (nie istnieje x, że B(x)), a zatem istnieje x, że $A(x) \vee B(x)$ jest fałszywe;
   d) można założyć prawdziwość poprzednika (dwa warianty: kreska na całym dopełnieniu A, wtedy nie istnieją żadne przedmioty na dopełnieniu A oraz B, jak również kreska na całym dopełnieniu B - wtedy również nie istnieją żadne przedmioty w dopełnieniu A oraz B)
4. a) prosty zapis byłby $\forall x(S(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \exists(S(x) \wedge P(x))$, ale taki zapis nie będzie prawem węższego rachunku predykatów; w teorii zdań kategorycznych przyjmuje się bowiem założenie o niepustości terminów; dlatego, jeśli chcemy, by odpowiednik a) był prawem węszszego rachunku predykatów, musimy to założenie uwzględnić. Poprawny zapis to: $[]\forall x(S(x) \rightarrow P(x)) \wedge \exists x S(x)] \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$;
   b) $[\forall x(S(x) \rightarrow \sim P(x)) \wedge S(x)] \rightarrow \sim (S(x) \rightarrow P(x))$ - znowu potrzebne jest założenie o niepustości zbioru przedmiotów mających własność S;
   c) $\forall x(S(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \sim \exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$;
   d) $[\sim \exists x(S(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x S(x)] \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$ (też potrzeba założenia o niepustości S).
5. a) U - jest uczniem, N - jest nauczycielem logiki: $\exists x \exists y(U(x) \wedge U(y) \wedge \wedge \exists z(N(z, x) \wedge N(z, y) \wedge x \neq y) \wedge \sim \exists x, y, m(U(x) \wedge U(y) \wedge U(m) \wedge N(z, x) \wedge N(z, y) \wedge N(z, m) \wedge x \neq y \wedge y \neq m \wedge x \neq m)$;
   b) S - jest studentem, K - kocha logikę: $\exists x(S(x) \wedge K(x))$;
   c) S- jest studentem, O - jest ojcem (predykat dwuargumentowy); $\forall x(S(x) \rightarrow \exists! y O(y, x))$, czyli $\forall x\{S(x) \rightarrow \exists y O(y, x) \wedge \forall y \forall z[O(y, x) \wedge O(z, x) \rightarrow y = z]\}$
   d) C - członek Drużyny Pierścienia, D - doszedł do Mordoru: $\sim$ Dla co najmniej trzech $x, C(x) \wedge D(x)$
6. Zagadki: 1. Tak. 2. Jest łotrem. 3. ostatnie zdanie. 4. Adam – rycerz, Tomasz – łotr, Zygmunt – łotr. 5. Zenon – łotr, Dawid – rycerz, Tadeusz – rycerz. 6. Bartosz - rycerz, Stefan – rycerz, Cezary – rycerz. 7. Roman – rycerz, Bogdan – łotr, Mirek – rycerz

Literatura

— Ajdukiewicz K., *Zarys logiki*, Warszawa 1958, wyd. 5
— Borkowski L., *Elementy logiki formalnej*, Warszawa 1976, wyd. 3
— Grzegorczyk A., *Logika popularna*, Warszawa 2010, wyd. 4
— Lechniak M., *Elementy logiki dla prawników*, Lublin 2012, wyd. 2
— Marciszewski W., *Sztuka rozumowania*, Warszawa 1994
— Pogorzelski W. A., Słupecki J., *O dowodzie matematycznym*, Warszawa 1970
— Wieczorek K., *Wprowadzenie do logiki dla studentów wszystkich kierunków*, Warszawa 2005
— Marek W., Onyszkiewicz J., *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, Warszawa 1975
— Smullyan R., *Jaki jest tytuł tej książki*, Warszawa 1993
— Smullyan R., *Dama czy tygrys*, Warszawa 1995
— Smullyan R., *Zagadki szachowe Sherlocka Holmesa*, Warszawa 1999
— Smullyan R., *Na zawsze nierozstrzygnięte*, Warszawa 2007
— Stanosz B., *Ćwiczenia z logiki*, Warszawa wiele wydań
— Szymanek K., Wieczorek K., Wójcik A., *Sztuka argumentacji. Ćwiczenia w badaniu argumentów*, Warszawa 2003.
— Wajszczyk J., *Jestem więc myślę*, Warszawa 2003
— Lewis Caroll, *Symbolic logic and the game of logic*, New York 1955, 4 wyd.; książeczka dostępna pod adresem:
http://www.gutenberg.org/files/28696/28696-h/28696-h.htm oraz
http://www.gutenberg.org/files/4763/4763-h/4763-h.htm