Fundacja Rozwoju KUL,
Katedra Logiki KUL

VII Konkurs Logiczny, część II

Lublin 2019

Spis treści

1. Wprowadzenie

Za nami I etap VII Konkursu Logicznego. Mamy nadzieję, że przygotowanie się do tego etapu przysporzyło Wam wiele przyjemności intelektualnej i rozszerzyło Waszą wiedzę oraz, przede wszystkim, pomogło ćwiczyć Wasze sprawności logiczne. Niektórzy z Was przeszli ten etap konkursu, kwalifikując się do finału. Innych z Was, choć tym razem się nie udało, zapraszamy już dziś do udziału w konkursie w przyszłym roku.

Niniejszym prezentujemy II część materiałów konkursowych. Stanowi ona rozszerzenie tematyki poruszonej w części I. Tam, jak pamiętacie, zajmowaliśmy się zadaniami w zakresie klasycznego rachunku zdań. Rachunek ten stanowi podstawę całej logiki klasycznej, dlatego każdy kurs logiki zaczyna się właśnie od niego. Jednak nie każde rozumowanie da się poprawnie przeprowadzić wyłącznie w oparciu o klasyczny rachunek zdań — nie każde też zadanie możemy rozwiązać wykorzystując wyłącznie wiedzę z zakresu klasycznego rachunku zdań. Dlatego zaprezentujemy tu odrobinę wiedzy z systemów logiki nabudowanych nad klasycznym rachunkiem zdań; innymi słowy, wszystko, czego wcześniej nauczyliście się z logiki, nadal obowiązuje. Podczas testu finałowego możecie więc spodziewać się zadań z zakresu materiału, którego dotyczył etap szkolny wzbogaconego o kilka zadań z zakresu omówionego w niniejszej „książeczce”.

Tak jak w I części materiał podzielimy tu na część teoretyczną, czyli *Co każdy logik wiedzieć powinien* i część praktyczną, czyli *Co każdy logik umieć powinien.* A zatem zapraszamy do pracy i, oczywiście, na finał konkursu w kwietniu na KUL!!

Materiały teoretyczne, tak jak poprzednio, zostały oparte na fragmentach podręcznika *Elementy logiki dla prawników*, zadania zaś pochodzą m. in. ze zbiorów zadań B. Stanosz, W. Marka i J. Onyszkiewicza oraz bardzo pięknego zbiorku zadań napisanego przez Lewisa Carolla (wszystkie informacje w spisie literatury) i świetnego podręcznika R. Purtilla, *Logic for Philosophers.*

***

Po analizie prac z pierwszego etapu zauważyliśmy, że macie sporo niechęci do uzasadniania swoich twierdzeń. Często wynik jest poprawny, ale brak uzasadnienia. Ale, jak wiecie z matematyki, sam wynik zadania nie stanowi jeszcze jego rozwiązania. Często od wyniku ważniejsza jest droga, jaką przeszliście. Dlatego zdecydowaliśmy się dodać kilka słów o uzasadnianiu. Jak sformułować uzasadnienie można się uczyć z analizy rozwiązań zadań zawartych w książeczkach R. Smullyana.

W niniejszym skrypcie dodaliśmy też fragmencik, który może przydać się Wam na co dzień; chodzi o analizę struktury argumentu oraz prostą metodę oceny wartości argumentu, którą zawdzięczamy pracy prof. M. Tokarza. Polecamy!!!

Marek Lechniak

2. Co każdy logik wiedzieć powinien ...

2.1. Teoria zdań kategorycznych

W pierwszej części Materiałów stwierdzaliśmy niezawodność wnioskowania wykazując, że jest ono oparte na jakimś prawie klasycznego rachunku zdań. Jednak istnieją takie wnioskowania, intuicyjnie uznawane za niezawodne, których niezawodności nie można wykazać odwołując się jedynie do tego rachunku. Weźmy następujący przykład:

Każdy prawnik jest człowiekiem.
Każdy prokurator jest prawnikiem.

Każdy prokurator jest człowiekiem.

Zapisując to wnioskowanie w języku rachunku zdań musielibyśmy pierwsze zdanie zastąpić zmienną p, drugie — zmienną q, trzecie zaś zmienną r (we wnioskowaniu bowiem występują trzy zdania proste). Otrzymalibyśmy schemat wnioskowania:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

który nie jest schematem niezawodnym, ponieważ odpowiadająca mu implikacja $(p \wedge q) \rightarrow r$ nie jest prawem logiki (jest ona zdaniem fałszywym dla $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$). Nie możemy stwierdzić niezawodności tego wnioskowania, ponieważ zapisując jego schemat użyliśmy po prostu trzech różnych zmiennych zdaniowych, a oczywiście nie dzieje się tak, że z dwóch dowolnych zdań wynika logicznie zdanie trzecie. Z łatwością można zauważyć, że o niezawodności naszego wnioskowania decyduje coś innego, niż fakt, że jest ono zbudowane ze zdań prostych. Jego niezawodność opiera się bowiem na strukturze tych zdań prostych. Wszystkie one są zdaniami postaci „Każde ... jest ...”, czyli zdaniami kategorycznymi, których teorię podał już Arystoteles. W niniejszym paragrafie przedstawimy właśnie teorię takich wnioskowań, którą nazywa się teorią zdań kategorycznych.

Definicja 1. *Zdania kategoryczne są to zdania postaci: „Każde S jest P”, „Żadne S nie jest P”, „Niektóre S są P” i „Niektóre S nie są P”.*

Są to więc zdania złożone z funktora zdaniotwórczego od dwóch argumentów nazwowych oraz dwóch jego nazwowych argumentów reprezentowanych przez zmienne S, P. Ze względu na argumenty nazwowe funktory te nie są funktorami prawdziwościowymi. W teorii zdań kategorycznych zakłada się, iż za zmienne nazwowe S i P można podstawiać wyłącznie nazwy ogólne, ale nie-uniwersalne (nazwy uniwersalne to takie, jak na przykład: „przedmiot”, „coś” itp.). W szczególności, co trzeba mocno podkreślić, nie mogą więc być podstawiane nazwy puste (takie jak np. „krasnolud” czy „hobbit”). Jako przykłady zdań kategorycznych mogą posłużyć nam następujące zdania: *Każdy kot jest drapieżnikiem*, *Niektórzy studiujący są mężczyznami* i tym podobne. Podmioty i orzeczniki zdań kategorycznych nazywane są terminami (od łac. *terminus* — kres, granica). Zdania kategoryczne można podzielić według dwóch kryteriów; pierwsze to *jakość* zdania, czyli fakt czy zdanie jest twierdzące, czy przeczące, drugie zaś, to *ilość*, czyli własność zdania polegająca na tym, że zdanie orzeka bądź o wszystkich desygnatach podmiotu, bądź też tylko o niektórych jego desygnatach. W ten sposób zdania kategoryczne mogą być dzielone na twierdzące i przeczące oraz na ogólne i szczegółowe. Objaśnienia w tym miejscu wymaga przyjmowane w teorii zdań kategorycznych znaczenie słówka „niektóry". Słówko to w języku polskim potocznie używane w znaczeniu „niewiele", „nie wszyscy" może być używane w języku naukowym w co najmniej trzech znaczeniach, a mianowicie:

— „co najmniej niektóry", czyli „nie żaden", a zatem: „przynajmniej jeden" — znaczenie to dopuszcza taką możliwość, że i wszystkie przedmioty posiadają daną cechę; prawdziwe przy tym znaczeniu są zdania: *Niektórzy studiujący są kobietami*; *Niektórzy mężczyźni są ludźmi* (bo co najmniej jeden mężczyzna jest człowiekiem), i tym podobne.

— „co najwyżej niektóry", czyli „nie wszystkie" — używamy go, gdy chcemy stwierdzić, że co najmniej jeden przedmiot nie posiada jakiejś cechy, choć być może i wszystkie przedmioty tej cechy nie posiadają; np. *Niektórzy studiujący nie są kobietami*, *Niektóre koty nie są roślinożerne*, i tym podobne.

— „tylko niektóry", czyli znaczenie najbliższe potocznemu, w którym „niektóry" znaczy tyle, co „kilka", „pewna ilość", ale na pewno „nie wszystkie" i „nie żaden"; np. *Niektórzy studiujący otrzymują stypendium naukowe*; *Niektórzy ludzie są księżmi*, itp.

Podstaw rozumienia zdań kategorycznych może dostarczyć poniższa tabela oraz zamieszczone pod nią tzw. diagramy Venna.

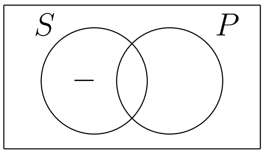
Nazwa zdania kategorycznego	oznaczenie	sposób czytania	interpretacja egzystencjalna
ogólno-twierdzące	SaP	Każde S jest P	Nie istnieją S nie będące P
szczegółowo-twierdzące	SiP	Niektóre S są P	Istnieją S będące P
ogólno-przeczące	SeP	Żadne S nie jest P	Nie istnieją S będące P
szczegółowo-przeczące	SoP	Niektóre S nie są P	Istnieją S nie będące P

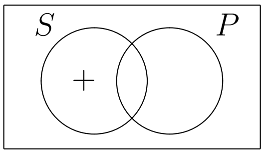
Pierwsza z kolumn zawiera nazwę zdania kategorycznego, druga zaś symboliczne jego oznaczenie. Litery a, e, i, o reprezentują funktory zdaniotwórcze od dwóch argumentów nazwowych, którymi są odpowiednio zwroty „Każde ... jest ...", „Żadne ... nie jest ...", „Niektóre ... są ...", „Niektóre ... nie są ...". Przyjęcie pierwszych czterech samogłosek alfabetu łacińskiego jako symboli funktorów bierze się stąd, że po łacinie *affirmo* znaczy tyle, co „twierdzę", *nego* zaś znaczy „przeczę". Litery a oraz i są zatem funktorami zdań twierdzących, a litery e i o — funktorami zdań przeczących, przy tym pierwsze samogłoski z obu par (a, e) odnoszą się do zdań ogólnych, a drugie (i, o) do zdań szczegółowych.

Diagramy Venna ilustrują pustość lub niepustość zbiorów. Mówimy, że zbiór jest pusty, gdy nie posiada elementów. Pustość jakiegoś zbioru na diagramie będzie ilustrowana przez postawienie na odpowiadającej temu zbiorowi części diagramu znaczka „–" (innym sposobem zaznaczenia pustości jest wykreślanie odpowiedniego obszaru na diagramie), podczas gdy niepustość zbioru będzie zaznaczana postawieniem znaczka „+". W ten sposób otrzymujemy następujące diagramy dla prawdziwości i fałszywości zdań kategorycznych:

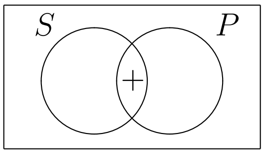
Prawdziwość *Fałszywość*

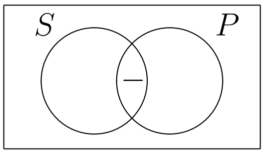
SaP



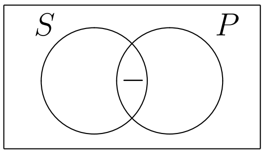


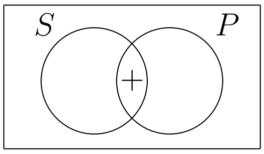
SiP



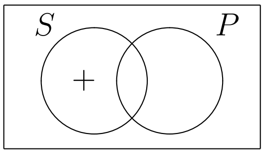


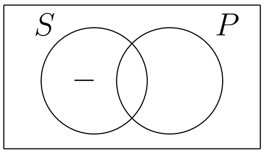
SeP





SoP





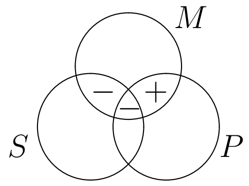
Diagramy Venna są właściwie narzędziem wystarczającym do badania poprawności rozumowań. Możemy ich zastosowanie na następującym przykładzie:
Zadanie: Zbadaj poprawność następującego schematu wnioskowania:

$$\begin{array}{c} MaP \\ \underline{SaM} \\ SaP \end{array}$$

Wnioskowanie to odpowiada wyrażeniu zdaniowemu (zgodnie z zasadą, że każdemu schematowi wnioskowania odpowiada implikacja, której poprzednikiem jest koniunkcja przesłanek schematu, a następnikiem jego wniosek).

$$(PiM \wedge SeM) \rightarrow SoP$$

Badanie tego, czy schemat wnioskowania (zwany w teorii zdań kategorycznych trybem sylogistycznym) jest dedukcyjnym schematem wnioskowania lub czy odpowiadająca mu implikacja jest prawem logiki, rozpoczynamy od założenia prawdziwości poprzednika badanej implikacji. Poprzednik ten jest koniunkcją, zatem oba człony tej koniunkcji winny być prawdziwe. Reprezentujemy prawdziwość owych przesłanek na diagramie Venna. Prawdziwości wniosku nie nanosimy na diagram. Diagram dla prawdziwości wniosku powinien w sposób jednoznaczny wynikać z diagramu dla prawdziwości przesłanek!



Reprezentowanie na diagramie prawdziwości przesłanek dogodnie jest zacząć od przesłanki ogólnej, potem reprezentujemy wartość logiczną (prawdziwość) przesłanki szczegółowej. Czasem dla uproszczenia można pominąć rysowanie na diagramie uniwersum (tak też, dla uproszczenia, uczynimy w analizowanych tu zadaniach). Jak widać z powyższego diagramu, aby zdanie SoP było prawdziwe, na diagramie powinien występować „+" na części S, które nie są P . Ale na tym obszarze „+" nie występuje (choć oczywiście na obszarze reprezentującym S „+" mógłby się pojawić, bo S, podobnie jak wszystkie terminy zdań kategorycznych, jest nazwą niepustą; kłopot w tym, że uznając prawdziwość przesłanek nie wiemy, czy „+" może być na S będących P czy też na S nie będących P), a zatem tryb sylogistyczny nie jest niezawodny.

2.2. Kwantyfikatory — Węższy rachunek predykatów

Rozważmy następujące wnioskowanie:

Każdy uczeń jest młodym człowiekiem.
Każda matka ucznia jest matką młodego człowieka.

Chociaż oba występujące w tym wnioskowaniu zdania są zdaniami kategorycznymi, a wnioskowanie intuicyjnie wydaje się poprawne, nie można jego poprawności zbadać za pomocą teorii zdań kategorycznych, mimo, że słowa „uczeń", „młody człowiek" występują i w przesłance, i we wniosku. Jednak we wniosku słowa te nie są terminami, ale częściami terminów. Schemat powyższego wnioskowania należy więc napisać w postaci:

$$\frac{SaP}{MaN}$$

(gdzie S — „uczeń", P — „młody człowiek", M — „matka ucznia", N — „matka młodego człowieka".)
Taki schemat nie jest formalnie poprawny. Przyczyną niemożności adekwatnego zapisania w języku teorii zdań kategorycznych schematu powyższego wnioskowania jest zbyt ubogi język tej teorii — nie występują w nim zwroty umożliwiające wyrażenie relacji między przedmiotami. Odpowiednio bogaty język, który umożliwia badanie poprawności tego rodzaju wnioskowań, posiada tzw. węższy rachunek predykatów (czasem zwany również rachunkiem kwantyfikatorów); teoria zdań kategorycznych może być traktowana (po przyjęciu pewnych założeń dodatkowych) jako część węższego rachunku predykatów.

Wszelkie zdania mogą być podzielone na zdania podmiotowo-orzecznikowe lub podmiotowo-orzeczeniowe, przy czym zdania podmiotowo-orzecznikowe można przedstawić jako pewną postać zdań podmiotowo-orzeczeniowych. W rachunku predykatów, jako podstawową, zakładamy strukturę zdań podmiotowo--orzeczeniową. Przykładami zdań jednostkowych o takiej strukturze są:

Jan śpi.
Jan śpiewa.
Jan jest kawalerem.
Jan jest wyższy od Piotra.
Jan kocha Zenobię.
Jan siedzi pomiędzy Karolem a Zenobią.

Pierwsze trzy zdania stwierdzają własności indywiduum (człowieka o imieniu Jan): jego stany, cechy lub czynności jakie wykonuje, natomiast trzy następne zdania stwierdzają relacje zachodzące między indywiduami — parą indywiduów („jest wyższy od", „kocha") lub trójką indywiduów („siedzi między ... a ..."). Zwroty, które określają własności indywiduów lub wyrażają zachodzenie relacji między indywiduami, nazywamy predykatami. Charakteryzowane od strony syntaktycznej predykaty są funktorami zdaniotwórczymi od jednego, lub więcej niż jednego, argumentu nazwowego. Przykładami predykatów jednoargumentowych są: „śpi", „śpiewa", „jest człowiekiem", „jest kawalerem", a przykładami predykatów więcej niż jednoargumentowych zwroty: „lubi", „jest wyższy od", „siedzi między ... a ...", i tym podobne. W rachunku predykatów nazwom jednostkowym (o których „myślimy" w taki sposób jak o nazwach indywidualnych) odpowiadają zmienne indywiduowo-nazwowe (reprezentowane przez zmienne x, y, z), natomiast predykatom odpowiadają zmienne reprezentujące predykaty (zmienne A, B, C, P, Q). Oczywiście zdania proste języka rachunku predykatów mogą być łączone w zdania złożone, dlatego u podstaw węższego rachunku predykatów, podobnie jak u podstaw teorii zdań kategorycznych, przyjmuje się klasyczny rachunek zdań.

W analizowanym we wstępie do tego rozdziału wnioskowaniu nie występują jednak zdania jednostkowe, lecz zdania kategoryczne stwierdzające, że wszystkie elementy jakiegoś zbioru przynależą do innego zbioru. Zdanie kategoryczne, przypomnijmy, zbudowane jest z dwóch nazw ogólnych oraz funktora zdaniotwórczego od tych nazw. Funktor ten wyraża „ile" przedmiotów jednego zbioru (wskazanego przez podmiot zdania) posiada cechę stwierdzaną w orzeczniku („każdy jest", „niektóre są", „niektóre nie są", „żaden nie jest"). W rachunku predykatów stałymi logicznymi służącymi do stwierdzenia tego, ile przedmiotów (indywiduów) posiada jakąś własność lub pozostaje względem siebie w jakiejś relacji, są kwantyfikatory.
Oto przykłady wyrażeń zdaniowych węższego rachunku predykatów:

a) wyrażenia atomiczne $A(x)$, $B(c)$, $P(x,\ y,\ b)$
b) wyrażenia złożone ze zmiennych zdaniowych lub wyrażeń atomicznych za pomocą funktorów prawdziwościowych: $p \vee P(x,\ b)$, $A(x) \rightarrow P(a,\ x,\ z)$;

c) wyrażenia, w których jakieś wyrażenie zdaniowe zostało poprzedzone kwantyfikatorem ze zmienną indywiduową: $(\exists x)(A(x) \to B(y))$, $p \to (\forall x)(A(x) \to B(y))$, $(\forall x)p$;

Nie są poprawnie zbudowane na przykład następujące ciągi znaków: $A(p)$, $(\exists A)(A(x) \to B(x))$, $(\forall)A(x)$. O kwantyfikatorach mówi się, że są one wyrażeniami, które wiążą zmienne, to znaczy „pozbawiają te zmienne wolności". Zmienna wolna zaś to taka zmienna, za którą wolno podstawiać. Teraz podamy dokładniejsze określenie zmiennej wolnej. Przy tym mówiąc o wyrażeniach z kwantyfikatorem używamy następujących terminów:

znak kwantyfikatora

$$(\forall x)\underbrace{A(x)}_{\text{zasięg kwantyfikatora}}$$

zmienna przy kwantyfikatorze

W podręcznikach szkolnych zamiast symboli $(\forall x)A(x), (\exists x)A(x)$ często można znaleźć symbole $\bigwedge\limits_{x} A(x)$, $\bigvee\limits_{x} A(x)$. Znaczą one oczywiście to samo, co „nasze" odwrócone A i E (od „for all", „exists") więc każdy, kto jest do nich „przywiązany" może ich używać w zastępstwie symboli, które stosujemy w naszym mini-podręczniku.

Termin „zasięg kwantyfikatora" oznacza wyrażenie zdaniowe, w którym zmienna wskazana przy kwantyfikatorze (objęta działaniem kwantyfikatora) jest związana przez ten kwantyfikator.

Definicja 2. *Zmienna α jest wolna w pewnym miejscu wyrażenia φ wtedy i tylko wtedy, gdy α występuje w tym miejscu wyrażenia φ i nie jest przy kwantyfikatorze oraz nie jest w zasięgu kwantyfikatora. Zmienna α jest wolna w wyrażeniu φ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wolna w pewnym miejscu wyrażenia φ.*

Przykłady:

$$(\forall x)(A(x) \to B(y))$$

x nie jest zmienną wolną, y jest zmienną wolną, z nie jest zmienną wolną (ponieważ zmienna z w ogóle nie występuje w tym wyrażeniu);

$$(\forall x)A(y) \to B(x)$$

x — zmienna wolna (ponieważ x występuje przy kwantyfikatorze, ale x nie występuje w zasięgu kwantyfikatora), y — zmienna wolna, z — nie jest wolna. Zmiennej wolnej przeciwstawiana bywa zmienna związana. Mówimy, że w wyrażeniach $(\forall \alpha)\phi$, $(\exists \alpha)\phi$ kwantyfikator wiąże zmienną α występującą przy nim oraz zmienną α wolną w ϕ; inaczej mówimy, że taka zmienna jest związana przez kwantyfikator.

Operacja podstawiania za zmienne odpowiednich zmiennych bądź stałych pozalogicznych powinna na wstępie zostać poddana odpowiedniej regulacji po to, aby w wyniku podstawiania nie można było przejść od zdań prawdziwych do zdania fałszywego. Przyjmuje się więc następujące warunki prawidłowego podstawiania:

1) Na każdym miejscu, w którym α występuje w φ jako zmienna wolna, podstawiamy to samo wyrażenie.
2) Żadna zmienna wolna wyrażenia podstawianego po podstawieniu nie może stać się związaną w wyniku podstawienia na miejscu podstawienia.

Rozważmy następujący przykład. Wyrażenie $(\exists x)(x > y)$ jest spełnione przez każdą liczbę naturalną, gdyż dla dowolnej takiej liczby istnieje liczba od niej większa. Gdybyśmy jednak w tym wyrażeniu podstawili za zmienną wolną y zmienną x, otrzymalibyśmy fałszywe wyrażenie $(\exists x)(x > x)$. Podstawienie takie jest jednak niepoprawne, ponieważ nie spełnia drugiego z warunków prawidłowego podstawiania.

2.2.1. Metoda sprawdzania niektórych wyrażeń rachunku predykatów za pomocą diagramów Venna

Czytelnik, który zapoznał się już z klasycznym rachunkiem zdań i teorią zdań kategorycznych może w tym miejscu zapytać, czy istnieje, tak jak w tamtych teoriach, metoda rozstrzygania o dowolnym wyrażeniu węższego rachunku predykatów, czy jest ono prawem logiki, czy też nie. Odpowiedź na to pytanie jest następująca: węższy rachunek predykatów jest nierozstrzygalny, to znaczy, że nie istnieje metoda pozwalająca w skończonej liczbie kroków o każdym wyrażeniu zapisanym w jego języku orzec, czy jest prawem logiki, czy też nie. Rozstrzygalny natomiast jest fragment węższego rachunku predykatów odnoszący się do wyrażeń, w których występują wyłącznie predykaty jednoargumentowe. Gdy idzie o tego typu wyrażenia metoda rozstrzygania opiera się na zastosowaniu diagramów Venna. W poniższym paragrafie przedstawimy kilka uwag na temat interpretacji wyrażeń z predykatami jednoargumentowymi — interpretacja ta pozwala lepiej intuicyjnie uchwycić sens kwantyfikatorów.

Niech symbol V oznacza uniwersum, czyli zbiór wszystkich przedmiotów w jakiejś dziedzinie (np. zbiór ludzi, zbiór studentów). Z kolei symbol $\emptyset$ oznacza zbiór pusty, czyli zbiór, do którego nie należy żaden przedmiot (np. zbiór bezdzietnych ojców). Wówczas wyrażenie $\mathcal{A} = \emptyset$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem pustym, tj. że żaden przedmiot nie należy do zbioru $\mathcal{A}$ (symbol A reprezentuje własność przedmiotu, podczas gdy symbol $\mathcal{A}$ - zbiór przedmiotów posiadających własność reprezentowaną przez predykat A). Wyrażenie $\sim (\mathcal{A} = \emptyset)$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ jest niepusty, tj. że istnieją przedmioty należące do zbioru $\mathcal{A}$. Wyrażenie $\mathcal{A} = V$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem uniwersalnym, tj. że każdy przedmiot należy do zbioru $\mathcal{A}$, a wyrażenie $\sim (\mathcal{A} = V)$ stwierdza, że zbiór $\mathcal{A}$ nie jest zbiorem uniwersalnym, tj. że pewne przedmioty nie należą do zbioru $\mathcal{A}$.

Po przyjęciu powyższych ustaleń można stwierdzić, że prawdziwe są następujące równoważności:

$$(\forall x)A(x) \equiv \{x : A(x)\} = V$$

$$\sim (\forall x)A(x) \equiv \sim (\{x : A(x)\} = V)$$

$$(\exists x)A(x) \equiv \sim (\{x : A(x)\} = \emptyset)$$

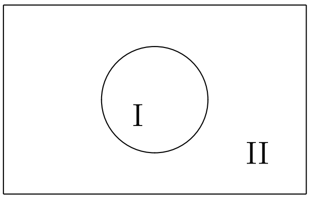
$$\sim (\exists x)A(x) \equiv \{x : A(x)\} = \emptyset$$

$$(\forall x) \sim A(x) \equiv \{x :\sim A(x)\} = V$$

$$(\exists x) \sim A(x) \equiv \sim (\{x :\sim A(x)\} = \emptyset)$$

Sposób odczytania powyższych wzorów wyjaśnijmy na przykładzie wzoru pierwszego. Stwierdza on, że „Dla każdego x, $A(x)$" jest równoważne stwierdzeniu, że „zbiór x mających własność A (w taki sposób odczytujemy zapis: $\{x : A(x)\}$) jest równy zbiorowi wszystkich przedmiotów V". Z kolei np. wzór ostatni czytamy w sposób następujący: „dla pewnego x, nie jest tak, że x posiada własność A wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że zbiór x-ów nie mających własności A jest zbiorem pustym".

Powyższe wzory mogą służyć już jako podstawa graficznej interpretacji zdań z kwantyfikatorami. W diagramie Venna:

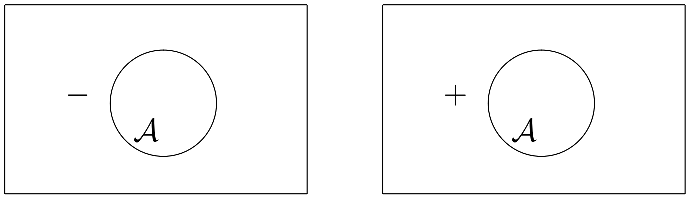


cały prostokąt symbolizuje zbiór uniwersalny V. Obszar I symbolizuje zbiór $\{x : A(x)\}$, zaś obszar II symbolizuje zbiór $\{x :\sim A(x)\}$.

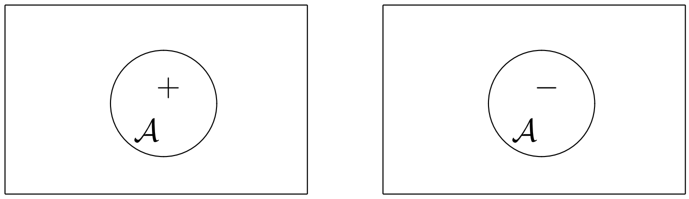
Niepustość danego zbioru zaznaczamy na diagramie umieszczając znak „+" na obszarze symbolizującym dany zbiór. To, że dany zbiór jest pusty, zaznaczamy na diagramie stawiając „–" na obszarze reprezentującym ten zbiór. Fakt zaś, że dany zbiór jest uniwersalny, zaznaczamy na diagramie stawiając „–" na części prostokąta poza obszarem symbolizującym ten zbiór. To, że dany zbiór nie jest uniwersalny, zaznaczamy na diagramie umieszczając znak „+" poza obszarem symbolizującym ten zbiór. W ten sposób powyższe wzory można przedstawić w sposób graficzny. Otrzymamy następujące diagramy Venna przedstawiające prawdziwość lub fałszywość wyrażeń utworzonych za pomocą kwantyfikatorów:

Prawdziwość *Fałszywość*

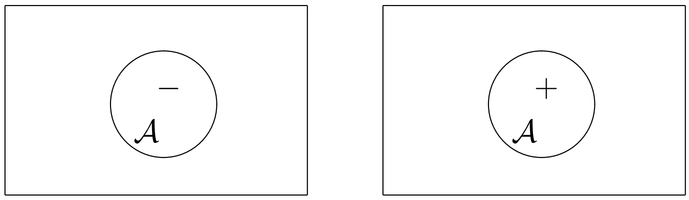
$(\forall x)A(x)$



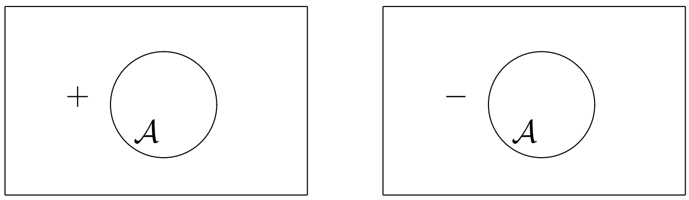
$(\exists x)A(x)$



$(\forall x) \sim A(x)$



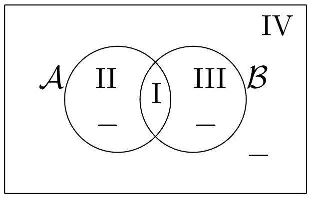
$(\exists x) \sim A(x)$



Zadanie
Sprawdź za pomocą diagramów Venna czy poniższe wyrażenie jest prawem logiki:

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow [(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)]$$

Ponieważ sprawdzane wyrażenie ma postać implikacji, możemy założyć w punkcie wyjścia prawdziwość poprzednika tej implikacji (lub fałszywość jej następnika). Załóżmy zatem, że poprzednik implikacji jest prawdziwy. Wówczas prawdziwe jest zdanie $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$, tzn. że zbiorem pustym jest ten podzbiór uniwersum, który zawiera przedmioty nie posiadające łącznie własności A wraz z własnością B. Rysujemy diagram, stawiając na obszarach II, III oraz IV „–".



Jak możemy zobaczyć, na diagramie zaznaczona została pustość zbioru wszystkich przedmiotów nie mających własności A („–” na obszarach III, IV) oraz pustość zbioru wszystkich przedmiotów nie mających własności B („–” na obszarach II i IV). A zatem prawdziwe jest zdanie $[(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)]$, czyli badane wyrażenie jest prawem logiki.

2.3. Wybrane pojęcia teorii zbiorów i relacji

Podczas dotychczas prowadzonych rozważań pojawiały się terminy „zbiór” oraz „relacja”. W tym miejscu chcemy krótko omówić kilka spośród najważniejszych pojęć teorii zbiorów oraz tej jej części, którą stanowi teoria relacji. Ponieważ pojęcia te są znane z programu matematyki w szkole średniej, poniższe uwagi będą bardzo krótkie. Należy jeszcze dodać, że w poniżej prezentowanej teorii zbiorów posługiwać się będziemy znakiem równości, zakładając, że spełnione są następujące trzy warunki dotyczące relacji równości (identyczności):

$$x = x$$

tzn., że każdy przedmiot jest identyczny z samym sobą.

$$x = y \to y = x$$

czyli jeśli x jest identyczny z y, to i y jest identyczny z x.

$$(x = y \wedge y = z) \to x = z$$

czyli jeśli x jest identyczny z y, a y jest identyczny z z, to x jest identyczny z z.

2.3.1. Pojęcie zbioru, działania na zbiorach i stosunki między zbiorami

Jak wskazaliśmy we wzmiankowanym już paragrafie książki, zbiory w sensie dystrybutywnym mogą być formowane przez proste wyliczenie jakichś przedmiotów lub przez podanie własności posiadanej przez wszystkie przedmioty danego zbioru. Ten drugi sposób można zapisać w postaci wzoru:

$$x \in \{y : W(y)\} \equiv W(x)$$

co można odczytać w sposób następujący: x należy do zbioru tych i tylko tych przedmiotów, które posiadają własność W wtedy i tylko wtedy, gdy x posiada własność W. Formułę tę czasem nazywa się aksjomatem definicyjnym. Obok tego warunku podstawowy dla rozumienia pojęcia zbioru jest warunek równości dwóch zbiorów, który może być zapisany w następujący sposób:

$$A = B \equiv (\forall x)[x \in A \equiv x \in B]$$

Warunek ten stwierdza, że dwa zbiory są równe (identyczne) wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy. Identyczne są więc np. takie dwa zbiory: $A = \{1, 21, 35\}$ oraz $B = \{21,\ 35,\ 1\}$; kolejność ustawienia elementów w zbiorze nie odgrywa tu roli.

Jeśli rozpatrujemy zbiory o skończonej liczbie elementów, dwa z nich mają szczególny charakter — zbiór uniwersalny i zbiór pusty. Zbiór uniwersalny to zbiór wszystkich przedmiotów. Na gruncie logiki formalnej podaje się następującą definicję zbioru uniwersalnego:

$$x \in V \equiv x = x$$

czyli x należy do zbioru uniwersalnego wtedy, gdy $x = x$. Zauważmy, że warunek po prawej stronie równoważności jest spełniony przez każdy przedmiot, a to oznacza, że każdy przedmiot należy do zbioru uniwersalnego. Oczywiście w praktyce ograniczamy dziedzinę rozważań do jakiegoś podzbioru zbioru uniwersalnego (wskazywaliśmy na to omawiając kwantyfikatory o ograniczonym zakresie). Taki podzbiór nazywamy uniwersum lub dziedziną przedmiotową dyskursu. W podobny sposób definiuje się zbiór pusty (zbiór nie posiadający żadnych elementów) — podaje się mianowicie warunek, którego nie spełnia żaden przedmiot. Otrzymujemy definicję:

$$x \in \emptyset \equiv \sim (x = x)$$

Fakt dopuszczania zbiorów pustych w teorii zbiorów (i w teorii mnogości, która jest teorią zbiorów nieskończonych) wskazuje na różnicę między dystrybutywnym a kolektywnym znaczeniem słowa „zbiór". Zbiory w sensie kolektywnym nie mogą być puste (bo są to całości w sensie fizycznym, czyli istności czaso-przestrzenne), nie mamy natomiast problemu z wyobrażeniem sobie dystrybutywnie rozumianego, pustego zbioru Polaków noblistów w dziedzinie ekonomii (do niego należałyby osoby narodowości polskiej, które otrzymały nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Takich osób aktualnie nie ma, ale opisaną własność bez popadnięcia w sprzeczność można rozważać).

Podstawowymi działaniami na zbiorach są: dodawanie, odejmowanie i mnożenie zbiorów oraz dopełnianie zbioru do uniwersum, a rezultatami tych działań są (odpowiednio) suma zbiorów, różnica zbiorów, iloczyn zbiorów i dopełnienie zbioru.

Definicja 3. *Suma zbiorów A i B (oznaczana za pomocą symbolu $A \cup B$) jest to zbiór złożony z tych i tylko tych przedmiotów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B, czyli*

$$A \cup B = \{x :\ x \in A \vee \in B\}$$

a zatem

$$x \in A \cup B \equiv (x \in A \vee \in B)$$

Definicja 4. *Iloczyn zbiorów A i B (oznaczany jako $A \cap B$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B, czyli*

$$A \cap B = \{x :\ x \in A \wedge x \in B\}$$

a zatem

$$x \in A \cap B \equiv (x \in A \wedge x \in B)$$

Definicja 5. *Różnica zbiorów A i B (oznaczana jako $A - B$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów zbioru A, które nie są elementami zbioru B, czyli*

$$A - B = \{x : x \in A \wedge \sim (x \in B)\}$$

a zatem

$$x \in A - B \equiv x \in A \wedge \sim (x \in B)$$

Definicja 6. *Dopełnienie zbioru A (oznaczane jako $-A$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które nie są elementami zbioru A, czyli*

$$x \in -A \equiv \sim (x \in A)$$

Przykłady: sumą zbiorów prokuratorów i profesorów jest zbiór tych osób, które są prokuratorami lub są profesorami, iloczyn tych zbiorów jest zbiorem osób będących zarazem prokuratorami i profesorami, a różnicę stanowi zbiór prokuratorów nie będących profesorami. Z kolei podanie dopełnienia jakiegoś zbioru wymaga określenia uniwersum, w którym dany (dopełniany) zbiór się zawiera. Np. dopełnienie zbioru prokuratorów (w uniwersum ludzi) jest zbiorem wszystkich ludzi nie będących prokuratorami, ale dopełnienie tego samego zbioru prokuratorów w uniwersum wszystkich przedmiotów będzie obejmować jakiekolwiek przedmioty, które nie są prokuratorami (np. stoły, foki, ludzi nie będących prokuratorami, itp). Zbiór wszystkich wyrażeń danego języka jest sumą zbiorów wyrażeń nazwowych, zdaniowych, funktorów i operatorów tego języka, zbiór wyrażeń nazwowych tego języka to różnica zbioru wyrażeń samodzielnych i zbioru wyrażeń zdaniowych (tego języka), a zbiór nie-funktorów to dopełnienie zbioru funktorów w uniwersum wszystkich wyrażeń tego języka.

Kolejnym ważnym pojęciem teorii zbiorów jest pojęcie zawierania się zbiorów (inkluzji zbiorów).

Definicja 7. *Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, tzn.*

$$A \subset B \equiv (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

lub też

$$A \subset B \equiv A - B = \emptyset$$

Tak np. zbiór prawników zawiera się w zbiorze ludzi, a zbiór nazw danego języka zawiera się w zbiorze wyrażeń nazwowych tego języka. Zauważmy, że zgodnie z podaną definicją każdy zbiór zawiera się w samym sobie, tzn. prawdą jest, że $A \subset A$ oraz zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, tzn. $\emptyset \subset A$. Dysponując pojęciem zawierania się zbiorów można podać definicję równości zbiorów, a mianowicie:

$$A = B \equiv A \subset B \wedge B \subset A$$

tzn. dwa zbiory są identyczne, gdy wzajemnie się zawierają.

2.3.2. Pojęcie relacji i niektóre własności relacji

Każdy człowiek po kursie matematyki wie, co to jest funkcja. Jednak nie każdy kojarzy pojęcie funkcji z pojęciem o szerszym zakresie, czyli pojęciem relacji. Jest to drugie, obok „zbioru", ważne pojęciem logiki dotąd jeszcze przez nas nie omawiane. Intuicyjnie rzecz ujmując relacja jest to stosunek zachodzący między przedmiotami. Powiemy, że Jan pozostaje w relacji bycia ojcem względem Hipolita, podobnie Karol jest ojcem Zenobii, a Gerwazy ojcem Protazego. Ogólnie można powiedzieć, że relacja bycia ojcem jest to wspólna własność par osób (Jana i Hipolita, Karola i Zenobii, Gerwazego i Protazego, i tak dalej). Analizując relację bycia ojcem zauważamy ponadto, że kolejność między przedmiotami pozostającymi w danym stosunku jest rzeczą ważną; jeśli np. Jan jest ojcem Hipolita, to oczywiście nie jest prawdą, że Hipolit jest ojcem Jana. Ta cecha różni pary członów relacji od „zwykłych" zbiorów dwuelementowych, w przypadku których kolejność elementów nie odgrywa roli, tzn. prawdą jest, że $\{x, y\} = \{y, x\}$. Te dwa spostrzeżenia rzucają światło na logiczne określenie relacji (tu dla uproszczenia ograniczymy się jedynie do określenia relacji dwuczłonowych).

Aby spełnić wymóg, iż kolejność elementów w parze jest jej cechą istotną, wprowadza się pojęcie pary uporządkowanej (symbolizowane przez zapis $< x, y >$ odczytywany: „para uporządkowana o pierwszym elemencie x i drugim y"), która jest zbiorem dwuelementowym, spełniającym następujący warunek równości par uporządkowanych:

$$< x, y >=< z, u >\equiv [x = z \wedge y = u]$$

co czytamy: dwie pary uporządkowane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich pierwsze elementy są równe oraz ich drugie elementy są równe. Dysponując pojęciem pary uporządkowanej można zdefiniować relację dwuczłonową.

Definicja 8. *Relacja dwuczłonowa jest to zbiór par uporządkowanych; innymi słowy x pozostaje w relacji R względem y wtedy i tylko wtedy, gdy para uporządkowana $< x, y >$ jest elementem relacji R, tj. pewnego zbioru par uporządkowanych.*

Wyrażenie „para uporządkowana $< x, y >$ jest elementem relacji R", czyli symbolicznie $< x, y >\in R$ zapisujemy skrótowo xRy.

Relacje zachodzą między przedmiotami. Ważne jest odróżnienie zbiorów przedmiotów, które są pierwszymi członami relacji od tych, które są drugimi jej członami. Pierwszy zbiór nazywamy dziedziną relacji, a drugi jej przeciwdziedziną.

Definicja 9. *Dziedzina relacji R jest to zbiór wszystkich przedmiotów, które względem jakiegoś przedmiotu pozostają w relacji R. Innymi słowy, x należy do dziedziny relacji R gdy istnieje taki przedmiot, względem którego x pozostaje w relacji R, co symbolicznie można zapisać:*

$$x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy.$$

Podobnie:

Definicja 10. *Przeciwdziedzina relacji R jest to zbiór przedmiotów, względem których jakiś przedmiot pozostaje w relacji R.*

$$y \in \text{C}\!\!\text{I}(R) \equiv (\exists x)xRy.$$

Tak na przykład dziedziną relacji bycia ojcem jest zbiór wszystkich osób, które są ojcami, a przeciwdziedziną tej relacji zbiór wszystkich osób mających ojca; dziedziną relacji bycia mężem jest zbiór wszystkich mężów, a jej przeciwdziedziną zbiór osób mających męża, czyli zbiór wszystkich żon.

Dysponując pojęciem relacji można określić pojęcie funkcji.

Definicja 11. *Funkcja jest to relacja, która każdemu elementowi dziedziny przyporządkowuje jeden, i tylko jeden element przeciwdziedziny.*

$$Funkcja\ (R) \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy \wedge xRz) \rightarrow y = z]$$

Zatem R jest funkcją wtedy, gdy nie może zachodzić przypadek, że jednemu elementowi dziedziny odpowiadają dwa elementy przeciwdziedziny. Przykłady funkcji: relacja zachodząca między wartościami logicznymi argumentów funktora prawdziwościowego a wartością logiczną wyrażenia utworzonego za pomocą tego funktora; relacja między osobami a datami ich urodzenia; relacja między osobami a ich matkami; działanie dodawania jako funkcja zachodząca między składnikami dodawania a ich sumą (relacja trójargumentowa), i tym podobne.

Przyglądając się podanym tu przykładom relacji możemy stwierdzić, iż relacje mogą mieć różne własności. Na przykład jedne z nich zachodzą „w jedną i w drugą stronę" (np. relacja bycia rodzeństwem), podczas gdy inne zachodzą tylko „w jedną stronę" (np. relacja bycia większym); są takie relacje, które zawsze zachodzą pomiędzy dowolną parą przedmiotów (bycie większym lub równym) oraz takie, które raz zachodzą, a innym razem nie zachodzą (bycie bratem). Podamy teraz kilka definicji podstawowych własności relacji.

Definicja 12. *Relacja R w zbiorze A jest zwrotna*

$$refl(R, A) \equiv (\forall x)[x \in A \rightarrow xRx]$$

Relacja R jest zwrotna w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między jakimś przedmiotem należącym do tego zbioru, a nim samym.

Przykłady: relacja bycia tego samego wzrostu w zbiorze osób, relacja bycia większym lub równym w zbiorze liczb, itp. W następnych definicjach dla uproszczenia przyjmiemy, że dziedziną relacji R jest zbiór A. Będziemy wówczas mówić, że relacja R jest zwrotna (w swojej dziedzinie), czyli po prostu, że relacja R jest zwrotna, symetryczna, i tak dalej.

Definicja 13. *Relacja R jest symetryczna*

$$sym(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[xRy \rightarrow yRx]$$

Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary przedmiotów, jeśli ta relacja zachodzi między pierwszym a drugiem przedmiotem, to zachodzi także między przedmiotem drugim a pierwszym.

Przykłady: relacja bycia rodzeństwem, relacja bycia małżonkiem, itp.

Definicja 14. *Relacja R jest przechodnia*

$$trans(R) \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$$

Relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej trójki przedmiotów, jeśli relacja ta zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem oraz między drugim a trzecim przedmiotem, to zachodzi także między pierwszym a trzecim przedmiotem tej trójki.

Przykłady: relacja bycia potomkiem, relacja bycia większym, itp.

Definicja 15. *Relacja R jest spójna*

$$con(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[\sim (x = y) \rightarrow xRy \vee yRx]$$

Relacja R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta zawsze zachodzi między dowolną parą różnych przedmiotów.

Np. relacja bycia większym w zbiorze liczb, relacja bycia jaśniejszym w zbiorze barw, itp.

Definicja 16. *Relacja R jest asymetryczna*

$$asym(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[xRy \rightarrow \sim (yRx)]$$

Relacja R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary przedmiotów, jeśli relacja ta zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem jakiejś pary, to nie zachodzi między przedmiotem drugim a pierwszym tej pary.

Np. relacja bycia ojcem, relacja bycia dłużnikiem, itp.

Powyższe definicje umożliwiają określenie dwóch zasadniczych typów relacji: relacji równoważnościowej oraz relacji porządkujących.

Definicja 17. *Relacja R jest równoważnościowa*

$$\equiv [refl(R) \wedge sym(R) \wedge trans(R)]$$

Relacja jest równoważnościowa, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady: relacja równoważności w zbiorze wyrażeń, relacja równoległości w zbiorze prostych, relacja przystawania w zbiorze trójkątów itp. Relacje równoważnościowe mają duże znaczenie przy konstruowaniu definicji. Otóż wszystkie przedmioty, między którymi zachodzi relacja równoważnościowa mają wspólną własność, której nie mają przedmioty w tej relacji nie pozostające. Np. wszystkie odcinki do siebie przystające mają tę samą długość, a wszystkie trójkąty, które są do siebie podobne mają ten sam kształt. Można więc powiedzieć, że kształt jakiegoś trójkąta jest to wspólna własność wszystkich trójkątów do niego podobnych, a długość jakiegoś odcinka to wspólna cecha wszystkich odcinków przystających do tego odcinka.

Drugim z ważnych pojęć teorii relacji jest pojęcie relacji porządkującej. Odróżnia się mocniejsze i słabsze pojęcia porządku.

Definicja 18. *Relacja R porządkuje zbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy relacja R jest relacją asymetryczną, przechodnią i spójną w zbiorze A.*

Takimi relacjami są na przykład: relacje bycia większym lub bycia mniejszym w zbiorze liczb, relacja bycia jaśniejszym w zbiorze barw, i tak dalej.

Definicja 19. *Relacja R częściowo porządkuje zbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta jest asymetryczna i przechodnia w zbiorze A.*

Przykładami relacji częściowo porządkującej są: wszystkie relacje porządkujące, relacja bycia starszym w zbiorze osób (relacja ta jest tylko częściowo porządkująca, bo mogą być osoby mające tyle samo lat, między którymi relacja bycia starszym nie zachodzi).

Wskazanie relacji porządkujących jakiś zbiór przedmiotów jest podstawą omawianej w pierwszej części książki operacji szeregowania przedmiotów. Relacja posiadania niższego numeru w albumie jest relacją porządkującą zbiór studiujących na uniwersytecie, która umożliwia ich uszeregowanie. Relacja "bycia wcześniej kupioną" częściowo porządkuje zbiór książek w bibliotece, a relacja bycia bardziej inteligentnym porządkuje częściowo zbiór studentów.

2.4. Struktura argumentu i ocena wartości argumentu

2.4.1. Struktura argumentu

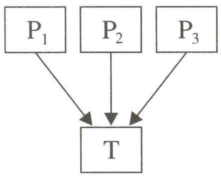
Wielu z Was, szczególnie o "nachyleniu humanistycznym" może po przeczytaniu powyższych partii odnieść wrażenie, że logika dotyczy tylko wnioskowań, w których dla danych kilku przesłanek można natychmiast wskazać wniosek. Tymczasem, powiecie, mamy zarówno w codziennych argumentacjach społecznych, politycznych czy naukowych, jak i w argumentacjach filozoficznych rozbudowane struktury z wieloma przesłankami, do których dołączone są uzasadnienia. Dlatego, wychodząc naprzeciw tym pytaniom, dołączamy ten fragmencik poświęcony analizie argumentu wraz z zaczerpniętą ze świetnego podręcznika prof. Marka Tokarza *Argumentacja, perswazja, manipulacja* metodą oceny wartości argumentu.

Najprostsza sytuacja argumentacyjna jest wtedy, gdy nadawca podaje jeden sąd P jako przesłankę, która jego zdaniem dostatecznie wspiera tezę T. Jak widzimy, w argumentacji mamy argumentującego, który podejmuje się podania racji za głoszona przez siebie tezą. Jest on przekonany, że środki, których używa, są wystarczające do wsparcia dowodzonej tezy. Zwykle jednak, do wykazania słuszności głoszonej tezy trzeba użyć kilku przesłanek; wówczas możemy mieć dwie podstawowe sytuacje:

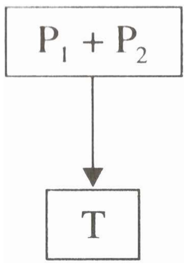
1. argument równoległy, gdy każda z przesłanek niezależnie od pozostałych, w jakimś stopniu wspiera konkluzję;
2. argument szeregowy, gdy żadna z przesłanek wzięta w izolacji od pozostałych przesłanek, nie wspiera tezy; dopiero wszystkie przesłanki razem wzięte mogą być traktowane jako uzasadnienie wniosku.

Argumentacja równoległa:
Przykład:

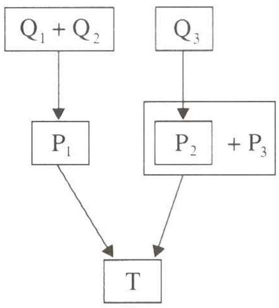
Teza: T= Kowalski zarabia więcej niż Wiśniewski.
Kilka niezależnych przesłanek, z których każda wspiera wniosek:
P_1 = Kowalski skończył lepsze studia od Wiśniewskiego
P_2 = Kowalski ma lepsze stanowisko od Wiśniewskiego.
P_3 = Kowalski jeździ lepszym samochodem niż Wiśniewski. Każda przesłanka wspiera wniosek w oderwaniu od pozostałych przesłanek, co ilustruje schemat:



W argumentacji szeregowej podważenie choćby jednej z przesłanek podważa cały dowód, gdyż pod nieobecność którejkolwiek z przesłanek pozostałe stają się bezwartościowe.
Przykład:
Teza: T= Watson nie ma gościa. Przesłanki:
P_1 = Na wieszaku nie wisi płaszcz.
P_2 = Jeśli Watson ma gościa, na wieszaku wisiałby płaszcz.



Czasem struktura argumentu jest złożona; argumentacja ma główne przesłanki (P_1, P_2, P_3 i główną konkluzję T oraz argumentacje wewnętrzne wspierające jedną lub więcej przesłanek:



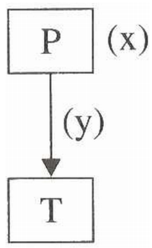
2.4.2. Ocena wartości argumentu – obliczanie stopnia akceptacji tezy według Tokarza

W prostym systemie oceny stopnia akceptacji tezy stworzonym przez profesora Marka Tokarza, tak stopień akceptowalności sądu P - oznaczany symbolem $A(P)$ – podanego przez nadawcę bez uzasadnienia (a takie sądy w argumentacji zawsze się pojawiają), jak i siłę prostych przejść inferencyjnych

mierzymy w skali pięciostopniowej, od 1 do 5, kierując się następującymi wytycznymi:
– jeśli nie jest możliwe, aby sąd P był prawdziwy, to: $A(P) = 1$;
– jeśli jest bardzo prawdopodobne, że sąd P jest fałszywy, to:$A(P) = 2$;
– jeśli wartość logiczna sądu P jest nierozstrzygalna, to: $A(P) = 3$;
– jeśli jest bardzo prawdopodobne, że sąd P jest prawdziwy, to: $A(P) = 4$;
– jeśli jest pewne, że sąd P jest prawdziwy, to: $A(P) = 5$.

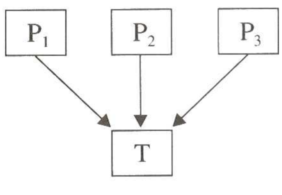
Siłę bezpośrednich przejść (inferencji) od przesłanki P do wniosku T określamy następująco:
– jeśli Tnie ma związku logicznego z P, to: siła przejścia od P do$T$ wynosi 1;
– jeśli taka sytuacja, w której P jest prawdą, a T fałszem, jest bardzo prawdopodobna, to: siła przejścia od P do T wynosi 2;
– jeśli nie da się stwierdzić, czy P uzasadnia T mocno, czy słabo, to: siła przejścia od P do T wynosi 3;
– jeśli taka sytuacja, w której P jest prawdą, a T fałszem, jest mało prawdopodobna, to: siła przejścia od P do T wynosi 4;
– jeśli przejście od P do T jest pewne, to znaczy jeśli T wynika dedukcyjnie z P,to: siła przejścia od P do T wynosi 5.

Stopnie akceptowalności umieszcza się na diagramach w nawiasach obok odpowiednich przesłanek, a siłę inferencyjną - obok strzałki symbolizującej daną inferencję. Dla prostego argumentu o przesłance P i wniosku T, gdzie stopień akceptowalności P wynosi x, a siła przejścia od P do T – y diagram wygląda tak:

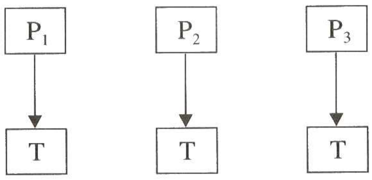


Stopień akceptowalności tezy T w oparciu o przesłankę P definiowany jest jako mniejsza z liczb x, y. Argument dostatecznie uzasadnia tezę (teza jest akceptowalna), gdy stopień jej akceptowalności jest większy niż 3.

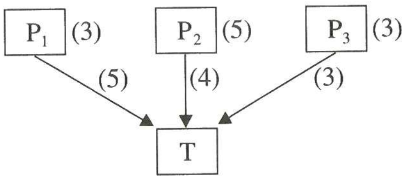
Dla argumentacji równoległej, dzieli się tę argumentację na tyle argumentów prostych, ile jest przesłanek niezależnie wspierających tezę T, czyli



zapisujemy tak:

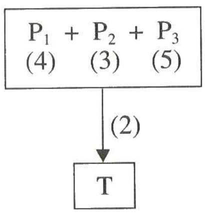


Otrzymane stopnie akceptowalności nazywamy pomocniczymi – Największy z pomocniczych stopni akceptowalności jest stopniem akceptowalności tezy T. Na przykład dla argumentacji równoległej o trzech niezależnych przesłankach mamy:



Jak widać teza T jest akceptowalna (ma stopień akceptowalności 4, bo P_1 ma stopień akceptowalności 3, P_2 – 4, a P_3 – 3).

Dla argumentacji szeregowej przypisujemy stopnie akceptowalności każdej z przesłanek z osobna i ustalamy stopień siły wynikania przy przejściu od tych przesłanek, traktowanych łącznie (czyli w koniunkcji), do wniosku T. Otrzymujemy w ten sposób o jedną liczbę więcej, niż jest przesłanek w danej argumentacji, a najmniejsza z nich stanowi stopień akceptowalności tezy A(T). Na przykład dla argumentu szeregowego o przesłankach $P_1, ..., P_3$, teza T jest nieakceptowalna (ma stopień akceptacji 2, który jest najmniejszą liczbą z 4, 3, 5, 2):



Na przykład argumentacja wyżej podana dotycząca płaszcza w pokoju doktora Watsona
(Teza: T= Watson nie ma gościa.
Przesłanki:
P_1 = Na wieszaku nie wisi płaszcz.
P_2 = Jeśli Watson ma gościa, na wieszaku wisiałby płaszcz.) która jest argumentacją szeregową, ma stopień akceptacji 4 lub 5 – zależy to od oceny przesłanki P_2. P_1 jest niewątpliwa (oparta na doświadczeniu), a stopień akceptacji przejścia od przesłanek do wniosku – 5 (bo wnioskowanie to oparte jest na prawie logiki $\sim p \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \sim q$).

3. Co każdy logik umieć powinien ...

3.1. Zadania

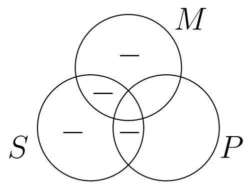
3.1.1. Stare sylogizmy

1. Znajdź wniosek (w oparciu o diagramy Venna) na podstawie następujących przesłanek:

Ludzie młodzi lubią spacerować.
Studenci są młodzi.
Rozwiązanie:
1. Zastępujemy nazwy w przesłankach za pomocą odpowiednich zmiennych oraz uzupełniamy zwroty kwantyfikujące. W języku polskim obowiązują pewne „niepisane" zasady: zdanie z nazwą w liczbie mnogiej traktujemy jako ogólne (a więc dodajemy zwrot „każdy" na początku), dla zdań szczegółowych kwantyfikacja jest wskazywana przez zwroty „pewne", „niektóre", czasem przez zastąpienie czasownika „jest (są)" przez „bywają", itp. Otrzymujemy: „młody człowiek" = M, „student"= S, „ten, który lubi spacerować" = P

$$\frac{\begin{array}{c} MaP \\ SaM \end{array}}{?}$$

2. Rysujemy diagram Venna:



3. Analizujemy diagram pod kątem relacji między S a P. Widzimy, że na diagramie wszystkie S nie będące P są „wykreślone" (na odpowiednich obszarach diagramu są „–", czyli nie istnieją S nie będące P, a stąd wynika, że zadanie SaP jest prawdziwe. A zatem szukanym wnioskiem jest zdanie: „Każdy student lubi spacerować".

a) Polacy są pracowici.
Żaden miś koala nie jest pracowity.

b) Pewni Żydzi są bogaci.
Wszyscy Eskimosi nie są Żydami.

c) Żadne tłuste stworzenie nie biega dobrze.
Pewne charty biegają dobrze.

d) Śliwki w czekoladzie są słodkie.
Niektóre słodkie rzeczy są lubiane przez dzieci.

e) Wszyscy bladzi ludzie są flegmatyczni.
Nikt nie wygląda poetycznie, o ile nie jest blady.

f) Pewne świnie są dzikie.
Wszystkie świnie są tłuste.

g) Żadne dzieci nie są cierpliwe.
Żadne niecierpliwe stworzenie nie może usiedzieć spokojnie.

h) Żadne misie koala nie są białe.
Żaden słoń nie jest biały.

i) Wszelkie dobrze odżywione kanarki śpiewają głośno.
Żaden kanarek nie jest smutny jeśli śpiewa głośno.

j) Niektóre jajka są ugotowane na twardo.
Żadne jajka nie są nierozbijalne.

2. Zbadaj za pomocą diagramów Venna, czy poniższe wnioskowania (sylogizmy) są poprawne.

a)
Żadni doktorzy nie są entuzjastami.
Pewni prawnicy są entuzjastami.
Pewni prawnicy nie są doktorami.

b)
Słowniki są użyteczne.
Użyteczne książki są drogie.
Słowniki są drogie.

c)
Wszelkie lwy są gwałtowne.
Pewne lwy nie piją kawy.
Pewne stworzenia, które piją kawę nie są gwałtowne.

d)
Wszelkie osy są nieprzyjazne.
Żadne lalki nie są nieprzyjazne.
Lalki nie są osami.

e)
Wszystkie moje cukierki są czekoladowe.
Wszystkie moje cukierki są smaczne.
Moje czekoladowe cukierki są smaczne.

f)
Wszystkie młode baranki skaczą.
Żadne młode stworzenie nie jest zdrowe, o ile nie skacze.
Wszelkie młode baranki są zdrowe.

g)
Żaden ptak oprócz pawia nie jest dumny ze swego ogona.
Niektóre ptaki, które są dumne ze swego ogona, nie mogą śpiewać.
Pewne pawie nie mogą śpiewać.

h)
Żadna żaba nie jest poetką.
Pewne kaczki nie są poetkami.
Pewne kaczki nie są żabami.

3. Znajdź wniosek dla następujących soritesów (sorites (stos, łańcusznik) to rozumowanie oparte na zdaniach kategorycznych mające więcej niż dwie przesłanki):
(1) Dzieci są nielogiczne.
(2) Nigdy nie pogardza się kimś, kto poskromił krokodyla.
(3) Nielogicznymi osobami się nie pogardza.
Rozwiązanie:
1. Tak jak poprzednio, wprowadzamy oznaczenia: „dziecko" = D, „nielogiczny" = N, „ktoś, kim pogardzają" = P, „poskromiciel krokodyla" = K; określamy też uniwersum, w którym analizujemy związki między zbiorami przedmiotów — tu może to być zbiór ludzi. 2. Zapisujemy schemat przesłanek:

$$\begin{array}{c} DaN \\ KeP \\ \underline{NaP} \\ ? \end{array}$$

2. Żeby znaleźć wniosek, w zadaniu 1. rysowaliśmy diagram Venna. Tu jednak byłoby to kłopotliwe, bo na diagramie trzeba by umieścić 16 różnych obszarów (są cztery nazwy, a więc wszystkich możliwych zbiorów przedmiotów wyróżnionych przez te nazwy jest 16 - jak wszystkich zbiorów dla trzech nazw było 8); chcąc narysować diagram trzeba by ostatnie koło rysować w innej płaszczyźnie. Żeby uniknąć kłopotu w soritesach najdogodniej jest zastosować metodę znajdowania wniosków cząstkowych — zgodnie z niezawodnym schematem rachunku zdań:

$$\begin{array}{c} (p \wedge q \wedge r) \rightarrow s \\ \underline{(p \wedge q) \rightarrow t} \\ (r \wedge t) \rightarrow s \end{array}$$

tak więc widzimy, że z drugiej i trzeciej przesłanki można utworzyć wnioskowanie cząstkowe:

$$\begin{array}{c} KeP \\ \underline{NaP} \\ ? \end{array}$$

dla którego za pomocą diagramów Venna znajdujemy wniosek NeK. Wniosek ten razem z pozostałą przesłanką pozwala utworzyć następny schemat wnioskowania:

$$\begin{array}{c} DaN \\ \underline{NeK} \\ ? \end{array}$$

Znowu za pomocą diagramów Venna można z tych przesłanek znaleźć wniosek KeD, czyli „Żaden poskromiciel krokodyla nie jest dzieckiem" (albo równoważne zdanie „Żadne dziecko nie jest poskromicielem krokodyla".

Czasem w soritesach wydaje się, że jest za dużo terminów. Wtedy korzystając z następujących praw obwersji ($-P$ — czytamy „nie-P, np. „nie-kot”, czyli wszystko w uniwersum co nie jest kotem; łatwo sprawdzić te prawa za pomocą diagramów Venna):

$$\begin{aligned} SaP &\equiv Se-P \\ SeP &\equiv Sa-P \\ SiP &\equiv So-P \\ SoP &\equiv Si-P \end{aligned}$$

możemy zmniejszyć liczbę terminów; np. w poniższym zadaniu b) żeby znaleźć wniosek, musimy określić dość wąskie uniwersum: „moje dzieci”. Wtedy np. „syn” = „nie-córka”, a „szczupły”=„nie-tłusty”.

a)
(1) Wszystkie niedojrzałe owoce są niezdrowe.
(2) Wszystkie te jabłka są zdrowe.
(3) Żaden owoc, który rośnie w cieniu nie jest dojrzały.

b)
(1) Wszyscy moi synowie są szczupli.
(2) Żadne z moich dzieci nie jest zdrowe, o ile nie gimnastykuje się.
(3) Wszystkie żarłoki, które są moimi dziećmi są tłuste.
(4) Żadna moja córka nie gimnastykuje się.
c)
(1) Nikt, kto naprawdę ceni Beethovena, nie chrząknie gdy grają sonatę ‘Księżycową’.
(2) Świnie na Nowej Gwinei są beznadziejnymi ignorantami w muzyce.
(3) Nikt, kto jest zupełnym ignorantem w muzyce, nie przestanie chrząkać, gdy grają sonatę ‘Księżycową’.
d)
(1) Zwierzęta, które nie wierzgają, są zawsze niepobudliwe.
(2) Osły nie mają rogów.
(3) Byk może zawsze wziąć kogoś na rogi.
(4) Żadne zwierzę, które nie wierzga, nie jest łatwe do okiełznania.
(5) Żadne bezrogie zwierzę nie jest łatwe do okiełznania.
(6) Wszystkie zwierzęta są pobudliwe, oprócz byków.
e)
(1) Jedynymi zwierzętami w tym domu są koty.
(2) Każde zwierzę, które lubi gapić się na księżyc, nadaje się na zwierzę domowe.
(3) Kiedy nie znoszę jakiegoś zwierzęcia, unikam go.
(4) Żadne zwierzę nie jest drapieżnikiem, o ile nie łazi po nocy.
(5) Każdy kot poluje na myszy.
(6) Żadne zwierzę mi nie odpowiada poza tymi w tym domu.
(7) Kangury nie nadają się na zwierzęta domowe.
(8) Żadne zwierzę poza drapieżnikami nie poluje na myszy.
(9) Nie znoszę zwierząt, które mi nie odpowiadają.
(10) Zwierzęta, które łażą po nocy lubią gapić się na księżyc.

3.1.2. Kwantyfikatory

Język węższego rachunku predykatów, mimo swej prostoty, ma dużą siłę wyrazu. Często można spotkać opinię, że każde z poprawnie postawionych zagadnień naukowych można adekwatnie zapisać w języku tego rachunku wzbogaconego o znak identyczności (w naszym skrypcie takiego rozszerzenia języka węższego rachunku predykatów nie będziemy jednak dokonywać). W niniejszym paragrafie pokażemy jak dokonywać przekładu zdań języka naturalnego na język węższego rachunku predykatów.

Zanim przejdziemy do przykładów dogodnie jest przyjąć definicje tak zwanych kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie. Przypomnijmy, że zdanie z kwantyfikatorem ogólnym jest bardzo mocne — kwantyfikator działa „z dokładnością” do uniwersum, to znaczy, że stwierdzając $(\forall x)A(x)$ uznajemy, że nie istnieją żadne przedmioty nie mające własności A. Trudno jednak w praktyce znaleźć taką własność, którą posiadałyby wszystkie przedmioty. Zwykle określoną własność posiadają natomiast wszystkie przedmioty należące do jakiegoś podzbioru uniwersum (np. dwunożność przysługuje wszystkim elementom zbioru ludzi, a posiadanie uprawnień prokuratorskich — wszystkim prokuratorom). Zakres działania kwantyfikatora zostaje wówczas ograniczony do jakiegoś podzbioru uniwersum. Wprowadzamy zatem następujące definicje:

Definicja 20. *Dla każdego x, takiego, że $A(x)$, $B(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $(\forall x)(A(x) \to B(x))$

Definicja 21. *Dla pewnego x, takiego, że $A(x)$, $B(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

Pierwszy z kwantyfikatorów „Dla każdego x, takiego, że $A(x)$” odpowiada zwrotom języka naturalnego postaci „Każde ...”, np. „każdy kot”, „każdy prawnik” lub — w zdaniach przeczących — „żaden sędzia”, „żadna ustawa” itp. Natomiast drugi z kwantyfikatorów odpowiada sformułowaniom postaci „pewien ...”, „niektórzy ...”, itp. np. „niektórzy sędziowie”, „pewien logik”.

Zadanie 5. Zapisz w języku rachunku predykatów następujące zdania:

a) *Każdy polityk jest prawdomówny.*
Oznaczmy: A — jest politykiem, B — jest prawdomówny.
W zdaniu użyto ogólnego kwantyfikatora o zakresie ograniczonym do zbioru polityków. Odpowiednikiem tego zdania w rachunku predykatów jest wyrażenie:
$$(\forall x)(A(x) \to B(x))$$
które możemy przeczytać w sposób następujący: *Dla każdego przedmiotu (czegoś, kogoś) mającego własność bycia politykiem przedmiot ten ma własność bycia prawdomównym.*

b) *Żaden filozof nie jest prawnikiem.*
Oznaczenia: A — jest filozofem, B — jest prawnikiem
$$(\forall x)(A(x) \to \sim B(x))$$
lub
$$\sim (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

c) *Niektórzy prawnicy są sędziami.*
Oznaczenia: A — jest prawnikiem, B — jest sędzią

$$(\exists x)(A(x) \land B(x)]$$

d) *Niektórzy sędziowie nie są wysocy.*
Oznaczenia: A — jest sędzią, B — jest wysoki

$$(\exists x)(A(x) \land \sim B(x))$$

Powyższe cztery przykłady podają jak zapisać w języku węższego rachunku predykatów cztery rodzaje zdań kategorycznych. Gdybyśmy mieli do czynienia wyłącznie ze zdaniami takich rodzajów, wprowadzanie węższego rachunku predykatów nie byłoby zasadne, gdyż język teorii zdań kategorycznych jest znacznie łatwiejszy w stosowaniu. Teraz rozważmy jednak przykład trudniejszy:

e) *Każdy prawnik jest uczniem pewnego logika.*
Oznaczenia: A —jest prawnikiem, B — jest logikiem, P - jest uczniem
Uwaga. Predykat „jest uczniem” jest predykatem dwuargumentowym (ktoś jest uczniem kogoś). Zdanie można przełożyć na niezbyt elegancki język polski: *Dla każdego przedmiotu będącego prawnikiem istnieje jakiś przedmiot będący logikiem taki, że pomiędzy pierwszym przedmiotem a drugim przedmiotem zachodzi relacja „jest uczniem”*, a to zdanie można już zapisać, jak następuje:

$$(\forall x)[A(x) \to (\exists y)(B(y) \land P(x,\, y))]$$

1. Zapisz w języku węższego rachunku predykatów następujące zdania języka naturalnego:

I)

a) Istnieją ludzie, którzy są muzykami.
b) Każde zwierzę jest bytem.
c) Wszyscy ludzie są istotami rozumnymi.
d) Żaden człowiek nie jest aniołem.
e) Żaden bogacz nie jest biedny i nie cierpi na niedostatek materialny.
f) Istnieją kobiety, które są piękne.
g) Wszystkie kobiety są piękne.
h) Wszystkie kobiety malują paznokcie. (przyjmij oznaczenia A – jest kobietą, B – jest paznokciem, R – maluje)
i) Nie wszyscy ludzie mają rodzeństwo.
j) Niektórzy ludzie nie piją alkoholu.

II)

a) Muszą istnieć substancje proste ponieważ istnieją rzeczy złożone, a rzecz złożona to nagromadzenie, kolekcja substancji prostych.
b) Tam, gdzie nie ma części, nie jest możliwa podzielność. Proste substancje nie mają części. A więc nie jest możliwe dzielenie ich.

c) Proste substancje (monady) nie mogą powstawać z części ani ginąć przez podzielenie na części. Dlatego jedynym sposobem, w który one mogą powstawać jest stworzenie i jedynym sposobem, w który one mogą ginąć jest unicestwienie, a więc jeśli one powstają, one są stwarzane, a jeśli giną, są unicestwiane.

2. Podaj po dwa przykłady zdań języka polskiego odpowiadających następującym wyrażeniom rachunku predykatów:

a) $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim R(x,y))]$

b) $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(R(x,y) \rightarrow \sim Q(y))]$

c) $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\forall(y)(Q(x) \rightarrow R(x,y))]$

d) $(\forall x)[(P(x) \wedge \sim Q(x)) \rightarrow (\exists y) \sim R(x,y)]$

3. Wykaż, za pomocą diagramów Venna, że poniższe wyrażenia są prawami logiki (tautologiami):

$$(\forall x)[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)] \tag{1}$$

$$(\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)] \tag{2}$$

$$(\exists x)[A(x) \vee B(x)] \rightarrow [(\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)] \tag{3}$$

$$[(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)] \rightarrow (\forall x)[A(x) \vee B(x)] \tag{4}$$

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)] \tag{5}$$

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)] \tag{6}$$

3.1.3. Zbiory i relacje

1. Dane są trzy zbiory:
   A - zbiór trójkątów prostokątnych
   B - zbiór trójkątów równobocznych
   C - zbiór trójkątów równoramiennych
   Jaki figury należą do następujących zbiorów:
   — $B \cap C$
   — $B \cup C$
   — $A - B$
   — $C - B$
   — $A \cup C$
   — $B - A$
2. Dane są zbiory:
   A = {1, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 23, 45}
   B = {2, 3, 4, 7, 9}
   C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}
   D – zbiór liczb parzystych
   Wskaż zbiory:
   — $A - B$

— $C - D$
— $A \cup C$
— $B \cup C$
— $B \cup D$
— $A \cap D$
— $B \cap C$
— $A \cap C$
1. Podaj elementy następujących zbiorów:

— $\{x \in \mathcal{N} : x \leqslant 2\}$
— $\{x \in \mathcal{N} : x^2 < 7\}$
— $\{x \in \mathcal{N} : x < -1\}$
2. Załóżmy, że różne litery oznaczają różne przedmioty, ewentualnie liczby rzeczywiste. Zbadać jakie relacje zawierania (inkluzji) zachodzą miedzy zbiorami A i B:

— $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;
— $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$
— $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$
— $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$
3. Załóżmy, że a, b, c, d ? ?. Jakie zależności muszą zachodzić między nimi, żeby zachodziły następujące równości:
— $\{b, c\} = \{b, c, d\}$
— $\{a, b, a\} = \{a, b\}$
— $\{\{a, b\}, \{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$
4. Udowodnij, że dla każdego zbioru A, B, C, D zachodzą następujące równości:
— $[(A \cup B)–C] = [(A–C) \cup (B–C)]$
— $[A–(B–C)] = [(A–B) \cup (A \cap C)]$
— $[(A–B) \cup C] = [(A \cup C)–B] \cup (B \cap C)]$
5. Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny następujących relacji R:

— bycia bratem;
— bycia matką;
— bycia studentem;
— bycia podzbiorem;
— wynikania logicznego.
6. Scharakteryzuj od strony własności formalnych relację:

— bycia znajomym;
— bycia bratem;
— bycia starszym;
— bycia młodszą siostrą.

7. Oceń siłę akceptacji tezy:
a) PiS ma większość w Sejmie. Jeżeli partia ma większość w Sejmie, sprawuje władzę. A więc PiS sprawuje władzę.
b) W Lublinie działa wiele teatrów alternatywnych. W Lublinie jest najno-

wcześniejsze Centrum Spotkania Kultur. W Lublinie odbywa się Festiwal Sztukmistrzów. A więc Lublin jest przodującym ośrodkiem kulturalnym.
c) Każdy człowiek myśli logicznie, bo człowiek jest z natury zwierzęciem logicznym. Uczestnicy Konkursu logicznego są ludźmi. Uczestnicy Konkursu Logicznego są bardzo bystrzy. A zatem uczestnicy Konkursu Logicznego myślą logicznie.

3.2. Zagadki

1. Znajdujesz się w krainie zamieszkanej wyłącznie przez rycerzy i łotrów. Podczas zwiedzania wyspy spotykasz dwie osoby, z których jedna jest znanym ci łotrem, a o drugiej nic nie wiesz. Napotkani wypowiadają następujące zdania:
Łotr: Poza pałacem królewskim mieszka przynajmniej jeden rycerz, poza tym, poza pałacem mieszkają też wszyscy łotrzy.
Nieznajomy: Jeżeli na jednego łotra przypada jeden rycerz, to na wyspie mieszka przynajmniej jeden łotr.
Czy z tych zdań można wywnioskować, że w pałacu mieszka przynajmniej jeden łotr?

2. Znajdujesz się w pałacu królewskim i idąc do swojej komnaty napotykasz młodzieńca, który stwierdza: Nie wszyscy rycerze mają konie wtedy i tylko wtedy, gdy wszyscy rycerze nie mają koni. Napotkany młodzieniec jest rycerzem czy łotrem?

3. W Wolnej Republice Bananów istnieje miasteczko zwane Zembla, którego wszyscy mieszkańcy są blondynami. W Republice żaden blondyn nie jest nieuczciwy. Obecny prezydent Republiki ma 160 cm wzrostu i bujną rudą czuprynę. Które z następujących stwierdzeń jest na pewno fałszywe?
Obecny prezydent Republiki jest nieuczciwy.
Żaden nieuczciwy człowiek nie jest mieszkańcem Zembli.
Żaden mieszkaniec Zemblii nie jest nieuczciwy.
Wszyscy uczciwi są Zemblanami.
Prezydent jest uczciwym Zemblaninem.

4. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Adama, Tomasza i Zygmunta. Adama twierdzi, że Zygmunt i Tomasz są tacy sami. Tomasz powiedział: „Dokładnie jedno z tych zdań jest prawdziwe: ja jestem rycerzem lub Zygmunt jest rycerzem". Zygmunt stwierdził, że Adam jest łotrem.

Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

5. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Zenona, Dawida, Tadeusza. Zenon powiedział: „Ja jestem rycerzem i Tomasz jest łotrem". Dawid powiedział, że Zenon jest łotrem. Tomasz stwierdził, że Zenon jest łotrem lub Dawid jest łotrem.

Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

6. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Bartosza, Stefana, Cezarego. Bartosz stwierdził, że Stefan mógł powiedzieć, że Cezary jest rycerzem.

Stefan powiedział, że nieprawdą jest Cezary jest łotrem. Cezary stwierdził, że fałszem jest to, że Bartosz jest łotrem.

Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

7. Na pewnej wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę oraz łotry, którzy zawsze kłamią. Spotkałeś trzech z nich: Romana, Bogdana, Mirka. Roman stwierdził: „Bogdan jest łotrem”. Bogdan powiedział: „Mirek I ja jesteśmy obydwoje rycerzami lub obydwoje łotrami”, Mirek stwierdził, że Bogdan jest łotrem. Wskaż, kto jest łotrem, a kto rycerzem.

3.3. Zagadki trochę nowsze....

a) Która osobowość?
Jack i John są bliźniakami i obaj mają podwójną osobowość. W normalnym stanie Jack zawsze mówi prawdę, a w odmienionym stanic zii wsze kłamie. Odwrotnie jest z Johnem - w stanie normalnym zawsze kłamie, a w stanie odmienionym zawsze mówi prawdę. Bracia są nierozróżnialni z wyglądu. Ich matka jest chyba jedyną osobą, która potrafi ich rozróżnić. Powstało kilka interesujących problemów:
1.
Powiedzmy, że spotkałeś któregoś z braci i chciałbyś wiedzieć, czy to Jack czy John. Możesz mu zadać tylko jedno pytanie, na które można odpowiedzieć „tak” lub „nie”. W dodatku musi to być pytanie proste, a nie złożone, to znaczy nie może zawierać spójników logicznych, takich jak „i”, „lub”, „nie” czy „jeżeli...to...”. Istnieje proste pytanie, które pozwoli rozróżnić braci. Jak ono brzmi?
2.
Innym razem spotkałeś któregoś z braci i nie interesuje cię, czy to jest Jack czy John, ale jesteś ciekawy, czy jest on w swoim normalnym stanie, czy w odmienionym. Jakie proste pytanie typu tak/nie pozwoli to rozstrzygnąć?
3.
Powiedzmy, że zamiast tego, w jakim stanie jest brat, którego spotkałeś, chciałbyś wiedzieć, czy obaj bracia są obecnie w tym samym stanie. Jakie proste pytanie tak/nie powinieneś zadać?
4.
Możesz łatwo sprawdzić, czy brat, którego spotkałeś, znajduje się w stanie, w którym mówi prawdę. Wystarczy, że zapytasz go, czy dwa plus dwa równa się cztery. Załóżmy jednak, że nie jesteś zainteresowany tym, czy to mi jest w stanie, w którym mówi prawdę, ale jesteś ciekawy, czy jego brat jest w stanie, w którym mówi prawdę. Jakie proste pytaniem typu tak/nie pozwoli ci zdobyć tę informację?
5.
Pewnego dnia jeden z braci był w jednym stanie przez cały dzień i powiedział tego dnia tylko jedno zdanie: „Jutro będę w odmienionym stanie”. Następnego dnia także był przez cały dzień w jednym stanie i powiedział w tym dniu tylko: „Wczoraj nie mówiłem prawdy”. Czy to był Jack czy John?
6.
Pewnego dnia matka bliźniąt przyszła z jednym z nich do lekarza. Lekarz nie wiedział, czy to był Jack czy John, ale wiedział, w jakim był stanie. Matka

wiedziała, czy syn, z którym przyszła, to Jack czy John, ale nie wiedziała, w jakim jest teraz stanie. Syn powiedział: , Jestem John i jestem teraz w moim stanie odmienionym". Lekarz nadal nie wiedział, który to z braci, a matka dalej nie potrafiła powiedzieć, w jakim jest stanie. Który to był z braci i w jakim był stanie?

b) O, nie!
Istnieje jeszcze dziwniejsza para bliźniaków, którzy mają na imię Edward i Edwin i są tak samo nieodróżnialni jak poprzedni. W okresie dorastania obaj zachorowali na dziwną chorobę, która na zawsze odmieniła ich życie. Od tamtej pory każdy z nich znajduje się w jednym z trzech stanów psychicznych - stanie 1, stanie 2 lub stanie 3. Stany powtarzają się cyklicznie - 1, 2, 3, 1, 2, 3... i tak dalej. Tak się składa, że w każdej chwili obaj bracia są w tym samym stanie - albo obaj są w stanie 1, albo w stanie 2, albo w stanie 3. Istnieje jednak pewna różnica między braćmi. Edward w stanie 1 nigdy nie mówi prawdy, a w pozostałych dwóch stanach mówi wyłącznie prawdę. Edwin, w stanie 2 nigdy nie mówi prawdy, a w pozostałych dwóch stanach mówi tylko prawdę.
1.
Pewnego dnia spotkałem obu braci na spacerze. Jeden z nich powiedział: „Jestem Edward". Drugi powiedział: „Jestem Edwin". Między jednym zdaniem a drugim bracia nie zmienili stanów. Który z nich to Edward: ten, który przemówił pierwszy, czy ten, który mówił drugi?
2.
Innym razem, gdy spotkałem obu braci, jeden powiedział: „Jestem Edward", a drugi (który nie zmienił do tego czasu stanu) powiedział: „Jeśli to prawda, to ja jestem Edwin". Później, przekonałem się, że w tym czasie bracia nie byli w stanie 3. Który z nich to był Edward?
3.
Pewnego dnia jeden z braci powiedział: „W stanie, w którym byłem poprzednio, kłamałem". Później drugi brat (który w tym czasie nie zmienił stanu) powiedział to samo. W jakim stanie znajdowali się bracia?
4.
Pewnego dnia Edward powiedział dwa zdania: 1. W stanie, w którym byłem ostatnio, kłamałem. 2. W następnym stanie będę kłamał. Edward nie zmienił stanu między jednym zdaniem a drugim. W jakim stanie się wtedy znajdował?
5.
Pewnego dnia jeden z braci powiedział: „Jestem Edward i jestem teraz w stanie 1". Który z nich to był? W jakim był stanie?
6.
Innym razem jeden z braci powiedział: „Jestem Edward lub jestem w stanie 2". (Przypominam, że „lub" znaczy, że prawdziwa jest co najmniej jedna możliwość albo obie.). Który z braci to powiedział?

4. Appendix. O uzasadnianiu jeszcze słów kilka

Tak zwana klasyczna definicja wiedzy głosi, że wiedza jest to prawdziwe uzasadnione przekonanie. A zatem,

Definicja 22. *x wie, że p wtedy i tylko wtedy, gdy:*
– *x jest przekonany, że p;*
– *p jest prawdziwe;*
– *x dysponuje uzasadnieniem dla p.*

Żeby zatem wiedzieć, nie wystarczy być prawdziwe przekonanym, jak się rzeczy mają, ale trzeba umieć to uzasadnić, tzn. podać racje, na których opieramy naszą wiedzę o prawdziwości twierdzenia. Możemy mieć tak zwane uzasadnienie bezpośrednie (np. przez odwołanie się do świadectwa zmysłów), albo uzasadnienie pośrednie (przez odwołanie się do innych zdań, czyli: drogą rozumowania). W logice stosuje się uzasadnienie pośrednie, szczególnie uzasadnienie odwołujące się do schematów niezawodnego wnioskowania, a najpełniejszą formą takiego uzasadnienia jest dowód. Przykłady dowodów były podawane np. przy okazji zadań o damach i tygrysach. Dowody są to ciągi zdań zbudowane zgodnie z regułami tworzenia dowodów, które głoszą w jaki sposób dowód rozpocząć, jak ma on przebiegać i kiedy dowód jest zakończony. Jeśli wszystkie kroki dowodu są tak opisane, że można, dysponując listą reguł, skontrolować poprawność dowodu, nazwiemy dowód sformalizowanym. W praktyce jest najczęściej tak (np. w matematyce), że podaje się szkic dowodu, zakładając, że czytelnik uzupełni go o brakujące elementy. Z kolei logicy zwykle dbają o to, by dowody były sformalizowane.

Możemy zapisywać nasze uzasadnienia dla zadań albo w postaci słownej, albo w postaci symbolicznej; zwykle pozostaniemy przy uzasadnieniach skróconych.
Zadanie:

Wskaż przesłanki i wniosek oraz oceń poprawność formalną argumentu:

Jeśli Sokrates złamie prawo i ucieknie, wówczas jego przyjaciele będą cierpieć. Jeśli ucieknie i wyemigruje do pobliskiego państwa, będzie uważany za wroga jeśli złamał prawo. Zatem, jeśli ucieczka jest złamaniem prawa, to jeśli Sokrates ucieknie, będzie uważany za wroga lub jego przyjaciele będą cierpieć.

Oznaczenia: p - Sokrates złamie prawo, q - Sokrates ucieknie, r - Przyjaciele będą cierpieć, s - Sokrates będzie uważany za wroga.
Przesłanki: P_1 Jeśli Sokrates złamie prawo i ucieknie, wówczas jego przyjaciele będą cierpieć.
P_2 Jeśli Sokrates ucieknie i wyemigruje do pobliskiego państwa, będzie uważany za wroga, jeśli złamał prawo.
Wniosek:
Jeśli ucieczka jest złamaniem prawa, to jeśli Sokrates ucieknie, będzie uważany za wroga lub jego przyjaciele będą cierpieć.

Schemat argumentu:

$$\frac{\begin{array}{l}(p \wedge q) \to r \\ q \to s\end{array}}{q \to (p \to (s \vee r))}$$

Uzasadnienie: Niech $q \to (p \to (s \vee r))$ będzie fałszywe. Wtedy q i p są prawdziwe, a $s \vee r$ będzie fałszywe, czyli i s i r jest fałszywe. Zatem implikacja $q \to s$ jest fałszywa, czyli schemat wnioskowania jest formalnie poprawny.

Zadanie:

Przypadek dotyczy rozprawy trzech ludzi, A, B, C, sądzonych za udział w rabunku.
W tym przypadku ustalono następujące fakty:
(1) Co najmniej jeden z tych trzech jest winny.
(2) Jeśli A jest winny i B jest niewinny, to C jest winny.
Dane te nie wystarczą, by skazać któregoś z nich, lecz wskazują na takich dwóch, z których jeden musi być winny. Która to dwójka?

Smullyan (*Jaki jest tytuł tej książki?*) w odpowiedziach daje następujące rozwiązanie:
"Ci dwaj to B i C; co najmniej jeden z nich musi być winny. Załóżmy bowiem, że A jest niewinny. Wówczas, na mocy (1), B lub C musi być winny. Załóżmy natomiast, że A jest winny. Jeśli B jest winny, to na pewno winny jest co najmniej jeden z pary B, C. Ale załóżmy, że B jest niewinny. Wówczas A jest winny, a B niewinny, tedy, na mocy (2), C musi być winny. Znów więc B lub C jest winny.

Ten ostatni opis stanowi jednocześnie uzasadnienie odpowiedzi. W pierwszym zatem zadaniu mamy dowód nie wprost, w drugim pewnego rodzaju dowód wprost. Jak więc widzimy uzasadnienie może być w postaci stwierdzeń z symbolami zmiennych albo w postaci pozaformalnej, czyli słownej opowieści, która prowadzi do uznania, że jeśli przesłanki są prawdziwe, to i wniosek winien być prawdziwy.

Literatura

Podręczniki:

— Ajdukiewicz K., *Zarys logiki*, Warszawa 1958, wyd. 5
— Borkowski L., *Elementy logiki formalnej*, Warszawa 1976, wyd. 3
— Lechniak M., *Elementy logiki dla prawników*, Lublin 2012, wyd. 2
— Marciszewski W., *Sztuka rozumowania*, Warszawa 1994
— Purtill R., *Logic for Philosophers*, New York, Evaston and London 1971
— Pogorzelski W. A., Słupecki J., *O dowodzie matematycznym*, Warszawa 1970
— Tokarz M., *Argumentacja, perswazja, manipulacja*, Gdańsk 2006

— Wieczorek K., *Wprowadzenie do logiki dla studentów wszystkich kierunków*, Warszawa 2005 (książka znana z obecności w internecie pod nazwą *Logika dla opornych*

Zbiory zadań:

— Marek W., Onyszkiewicz J., *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, Warszawa 1975
— Smullyan R., *Jaki jest tytuł tej książki*, Warszawa 1993
— Smullyan R., *Dama czy tygrys*, Warszawa 1995
— Smullyan R., *Zagadki szachowe Sherlocka Holmesa*, Warszawa 1999
— Smullyan R., *Zagadki Szeherezady*, Warszawa 2004
— Smullyan R., *Przedrzeźniać przedrzeźniacza*, Warszawa 2007
— Smullyan R., *Na zawsze nierozstrzygnięte*, Warszawa 2007
— Stanosz B., *Ćwiczenia z logiki*, Warszawa wiele wydań
— Szymanek K., Wieczorek K., Wójcik A., *Sztuka argumentacji. Ćwiczenia w badaniu argumentów*, Warszawa 2003.
— Wajszczyk J., *Jestem więc myślę*, Warszawa 2003
— Lewis Caroll, *Symbolic logic and the game of logic*, New York 1955, 4 wyd.; książeczka dostępna pod adresem:
http://www.gutenberg.org/files/28696/28696-h/28696-h.htm oraz
http://www.gutenberg.org/files/4763/4763-h/4763-h.htm